PROGRAMM

DES

KÖNIGLICH WÜRTTEMBERGISCHEN

SEMINARS SCHÖNTHAL.

ZUM

SCHLUSS DES VIERJÄHRIGEN CURSES VON 1864—1868.

INHALT:

I. DAS MALFATTISCHE PROBLEM. VON PROFESSORATSVERWESER BINDER.

II. NACHRICHTEN ÜBER DAS SEMINAR SCHÖNTHAL, MIT EINEM NEKROLOG DR. ELWERT'S, VON EPHORUS MEZGER.

EVANG. LANDESBIBLIOTHEK IN WÜRTTEMBERG BEIM OBERKIRCHENRAT

A 24/ Schön - 1864/68 - Präsenz

Gustav

SWB V
BL V

TÜBINGEN,
GEDRUCKT BEI HEINRICH LAUPP.
1868.



SWB v

Geübtere Leser des folgenden Aufsatzes werden gebeten zu berücksichtigen, dass derselbe mit Absicht ganz elementar gehalten ist, damit er auch von Schülern verstanden werden könne, die mit den Anfangsgründen der neuern Geometrie nicht vertraut sind. In den Figuren sind einige Linien weggelassen, die sich Jeder leicht hinzudenkt; im Text nur solche Behauptungen unbewiesen hingestellt, deren Beweis auch der Schüler ohne Mühe ergänzt. Diese Bemerkungen gelten jedoch nicht für die zwei letzten Abschnitte, in welchen der Kürze wegen nicht Alles vollständig ausgeführt ist. — Nach den Sätzen I, 1 können zunächst die Abschnitte II und III, und dann erst die Sätze I, 2, 3 gelesen werden.

I. Einige Sätze über Tangenten.

1.

Wenn man sowohl die drei inneren Winkel eines Dreiecks ABC, als deren Nebenwinkel halbirt, so schneiden sich bekanntlich die Halbirungslinien je zweier inneren Winkel sowohl, als die ihrer Nebenwinkel auf der Halbirungslinie des dritten inneren Winkels, und man erhält im Ganzen vier Durchschnittspunkte, von denen einer, O, im Dreieck selbst liegt, die andern, O′, O″, O‴, ausserhalb des Dreiecks in die Winkel BAC, CBA, ACB fallen, und welche die Mittelpunkte von vier die drei Seiten berührenden Kreisen sind. Die Berührungspunkte dieser Kreise mit den Seiten sind die Fusspunkte der Lothe OF, OE, OD; O′F′, O′E′, O′D′; O″F″ u. s. w., und zwar liegen die Berührungspunkte des Kreises O auf den Seiten selbst, während von den Berührungspunkten der drei andern Kreise je zwei auf die Verlängerungen der Seiten fallen, in deren Winkel der Kreis liegt. Man weiss ferner, dass Fig. 1. a.

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} &CE = CD,\ BD = BF,\ AF = AE,\\ &CE' = CD',\ BD' = BF',\ AF' = AE',\ \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

und leitet daraus, wie ebenfalls bekannt, indem man $BC + CA + AB = 2s$ setzt, ab

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} &CE = CD = s - AB,\ BD = BF = s - AC,\ AF = AE = s - BC,\\ &CE' = CD' = s - AC,\ BD' = BF' = s - AB,\ AF' = AE' = s,\ \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Daraus kommt auch

$$\text{(c)}\qquad \begin{aligned} &CD - BD = AC - AB,\ BF - AF = BC - AC,\ AE - CE = AB - BC,\\ &CD' - BD' = AB - AC,\ BF' + AF' = BC + AC,\ AE' + CE' = AB + BC,\ \text{u.s.w.}\end{aligned}$$

Es gelten aber auch folgende Umkehrungen:

(d) *Wenn auf den Seiten eines Dreiecks ABC (oder deren Verlängerungen) drei Punkte D, E, F, (D', E', F' u. s. w.) so liegen, dass CE = CD, BD = BF, AF = AE, (CE' = CD', BD' = BF', AF' = AE' u. s. w.), so schneiden sich die in D, E, F, (D', E', F' u. s. w.) auf den Seiten errichteten Lothe in einem Punkte, dem Mittelpunkte eines Kreises, welcher die Seiten in den drei Punkten berührt.*

Man bemerke erstens: Wenn F und E auf AB und AC selbst liegen, so liegt D auf BC selbst. Es sei $AB > AC$, so ist, weil $AF = AE$, $BF - CE = AB - AC < BC$; aber $BF = BD$, $CE = CD$, also $BD - CD$ positiv und $< BC$, was nur möglich, wenn D auf BC selbst liegt. Analog folgt die Behauptung, wenn $AC > AB$. Ist aber $AC = AB$, so ist $BD = CD$, was ebenfalls nur möglich, wenn D auf BC selbst liegt.

Zweitens: Wenn E' auf der Verlängerung von AC, so liegt F' auf der Ver-
Fig. 1. b. längerung von AB und D' auf BC selbst. Denn läge F' auf AB selbst, so wäre jedenfalls $AB > AC$, und es folgte, da $AF' = AE'$, $AB - AC = AF' + BF' - AE' + CE' = BF' + CE'$, also $BF' + CE' < BC$. Aber $BF' = BD'$, $CE' = CD'$; somit wäre $BD' + CD' < BC$, was für keine Lage des Punktes D' auf BC oder deren Verlängerungen möglich ist. Läge aber F' auf der Verlängerung von BA, so wäre $AB + AC = BF' - AF' + AE' - CE' = BF' - CE' > BC$, also auch $BD' - CD' > BC$, was
Fig. 1. a. wiederum für keine Lage von D' auf BC oder deren Verlängerungen möglich ist. Wenn nun demnach F' auf der Verlängerung von AB liegt, so ist, für $AB > AC$, wieder $AB - AC = AF' - BF' - AE' + CE' = CE' - BF' < BC$, also auch $CD' - BD'$ positiv und $< BC$, also D' auf BC selbst. Analog folgt letztere Behauptung, wenn $AC > AB$. Für $AB = AC$ aber hat man $CD' = BD'$, und D' muss abermals auf BC selbst liegen.

Aus dem Bisherigen folgt, dass überhaupt die drei Punkte entweder auf den Seiten des Dreiecks selbst liegen, oder dass einer auf einer Seite selbst liegt, und die beiden andern auf die über die Endpunkte dieser Seite hinausgehenden Verlängerungen der beiden andern Seiten fallen. Dann aber kann man aus der Voraussetzung wieder ableiten $CE = CD = s - AB$, $BD = BF = s - AC$, $AF = AE = s - BC$, ($CE' = CD' = s - AC$, $BD' = BF' = s - AB$, $AF' = AE' = s$, u. s. w.) und sieht daraus nach (b), dass D, E, F (D', E', F' u. s. w.) die Berührungspunkte des Kreises O (O' u. s. w.) sind, woraus sofort folgt, dass die Lothe in diesen Punkten sich in O (O' u. s. w.) schneiden.

(e) *Wenn auf BC der Punkt D so liegt, dass CD — BD = AC — AB, so ist D Berührungspunkt des BC, CA und AB berührenden Kreises.*

Da $CD - BD = AC - AB < BC$, so liegt D auf BC selbst. Ferner ist jedenfalls $CD < AC$, und $BD < AB$. Denn aus $CD \geq AC$ würde mit Hilfe der Voraussetzung folgen $BD \geq AB$ und umgekehrt, somit $CD + BD = BC \geq AB + AC$, was unmöglich. Macht man nun, auf CA, $CE = CD$ und, auf BA, $BF = BD$, so liegen E und F auf CA und BA selbst, und es folgt, mit der Voraussetzung, dass auch $AF = AE$, u. s. w.

(f) *Wenn auf BC der Punkt D' so liegt, dass CD' — BD' = AB — AC, so ist D' Berührungspunkt des BC selbst, AB und AC auf den Verlängerungen berührenden Kreises.*

Da CD' — BD' = AB — AC $<$ BC, so liegt D' auf BC selbst. Macht man nun auf den Verlängerungen von AC und AB, CE' = CD', BF' = BD', so wird, mit der Voraussetzung, auch AF' = AE', u. s. w.

(g) *Wenn auf der Verlängerung von AC der Punkt E' so liegt, dass AE' + CE' = AB + BC, so ist E' Berührungspunkt des BC selbst, AC und AB auf den Verlängerungen berührenden Kreises.*

Es ist hier jedenfalls AE' $>$ AB, und CE' $<$ BC. Denn aus AE' $\overline{\overline{<}}$ AB würde mit Hülfe der Voraussetzung folgen CE' $\overline{\overline{>}}$ BC, und umgekehrt, und es wäre AE' — CE' = AC $\overline{\overline{<}}$ AB — BC, was unmöglich. Macht man also, auf AB, AF' = AE', und, auf CB, CD' = CE', so liegt F' auf der Verlängerung von AB, D' auf BC selbst, und es folgt, mit der Voraussetzung, auch BF' = BD', u. s. w.

Wenn der Punkt A im Unendlichen liegt, d. h. wenn BF und CE parallel sind, so geht die Halbirungslinie des Winkels A in die Mittellinie der beiden Parallelen über, die Halbirungslinie seines Nebenwinkels und mit ihr die Punkte O'' und O''' fallen ins Unendliche. Statt der Gleichungen (a) erhält man Fig. 1. c.

(h)
$$\begin{array}{l} CE = CD,\ BD = BF,\ FE \text{ Loth auf } BF \text{ und } CE \\ CE' = CD',\ BD' = BF',\ F'E' \text{ Loth auf } BF' \text{ und } CE'; \end{array}$$

statt der Gleichungen (c)

(i)
$$\begin{array}{l} CD - BD = EC - FB,\ BF = BC - EC,\ EC = BC - FB \\ CD' - BD' = E'C - F'B,\ BF' = BC - E'C,\ E'C = BC - F'B. \end{array}$$

Von den Umkehrungen sprechen wir folgende aus:

(k) *Wenn auf BC, CE, FB die Punkte D, E, F so liegen, dass CE = CD, BD = BF und FE Loth auf CE und FB ist, so schneidet das Loth auf BC in D die FE in einem Punkte, dem Mittelpunkte eines die drei Geraden in D, E, F berührenden Kreises.*

Man bemerke, dass E und F auf derselben Seite von BC liegen müssen. Dies ist an sich klar, wenn BC Loth auf beiden Parallelen; steht aber BC schief auf denselben, so wäre, wenn F''E'' die BC in G schnitte, BF'' $<$ BG, CE'' $<$ CG, somit BF'' + CE'' $<$ BC, also auch BD + CD $<$ BC, was für keine Lage von D auf BC oder ihren Verlängerungen möglich ist. D muss aber auf BC selbst liegen. Denn es ist BD — CD = BF — CE = CH, wenn CH parallel EF gezogen wird, also BD — CD $<$ BC, was nur möglich, wenn D auf BC selbst liegt.

Dann ist aber $\triangle$ OEC $\cong$ $\triangle$ ODC und $\triangle$ ODB $\cong$ $\triangle$ OFB, also OE = OD = OB u. s. w.

(l) *Wenn auf BF der Punkt F so liegt, dass BF = BC — CE und FE Loth auf BF und CE ist, so ist F der Berührungspunkt eines die drei Geraden berührenden Kreises.*

Denn wenn man, auf BC, BD = BF macht, so wird nach der Voraussetzung auch CD = CE u. s. w.

2.

Fig. 2. Man erinnere sich zuvor, dass die zwei innern gemeinschaftlichen Tangenten CD und EF zweier Kreise A und B einander gleich sind. Nun gilt:

(a) *Wenn ein Punkt G auf einer Verlängerung einer innern gemeinschaftlichen Tangente CD der Kreise A und B liegt, so ist die Differenz der zwei andern Tangenten GJ — GH = CD = EF.*

Beweis. GJ = GD, GH = GC, also GJ — GH = GD — GC = CD = EF.

(b) *Wenn die Differenz der von einem Punkte G an die Kreise A und B gezogenen Tangenten gleich ist der gemeinschaftlichen innern Tangente EF, und der Punkt nicht auf einer Verlängerung von EF liegt, so liegt er auf einer Verlängerung von CD.*

Beweis. G kann nicht auf EF selbst liegen, denn für irgend einen solchen Punkt O ist OC = OE, OD = OF, somit OC + OD = EF und OC — OD $<$ EF.

Liegt nun G auf derselben Seite von EF wie Kreis A, so gehen zwei Tangenten von G an den Kreis B, welche die EF schneiden müssen, und zwar wird immer F zwischen den beiden Durchschnittspunkten liegen, weil der Kreis B äusserer Berührungskreis eines Dreiecks GOK ist, welcher die Seiten GK und GO auf den Verlängerungen, die Seite OK also zwischen O und K berührt.

Nun kann fürs Erste nicht etwa die Tangente an Kreis A die grössere sein, so dass GH — GJ = EF wäre. Ist nämlich GJ diejenige Tangente, welche die Verlängerung von EF in K schneidet, so wäre GH — GJ = GH — GK — KJ = GH — GK — KF = EF oder GH = GK + KE. Zieht man nun aber GE, so muss diese den Kreis A schneiden, und weil sie bei E auf die andere Seite von EF tritt, wo der Kreis A nicht liegt, so muss ihr zweiter Durchschnittspunkt mit diesem zwischen G und E liegen, also GE $>$ GL sein. Also ist $GE^2 > GL \cdot GE$, aber $GL \cdot GE = GH^2$, somit $GE^2 > GH^2$, GE $>$ GH. Aber GK + KE $>$ GE, also noch mehr GK + KE $>$ GH, somit ist die obige Annahme unstatthaft.

Fürs Zweite kann G nicht die Lage G′ haben, so dass eine Tangente G′D′ die Verlängerung von FE in O′ schnitte. Denn es wäre G′D′ — G′H′ = G′O′ + O′F — G′H′ = G′O′ + O′E + EF — G′H′ = EF, oder G′O′ + O′E = G′H, eine Annahme, deren Unzulässigkeit wie oben bewiesen wird, indem man G′E zieht.

Also muss es vom Punkt G eine Tangente GD an Kreis B geben, welche die FE selbst in O schneidet und es muss GD $>$ GH sein, so dass GD — GH = EF oder GO + OD — GH = EO + OF = EO + OD oder GO = GH + OE. Macht man also GC = GH, so liegt C zwischen G und O, und es ist CO = OE. GH schneidet aber verlängert entweder die EF in M oder ist derselben parallel; im ersten Falle ist MH = ME, im zweiten HE Loth auf GH und OE, und es folgt nach 1, (d) oder (k), dass die Lothe in H, E, C sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des die drei Geraden berührenden Kreises schneiden. Nun schneiden sich aber die Lothe in H und E in Punkt A und der aus A mit AH beschriebene Kreis ist der fragliche Berührungs-

kreis. Also berührt GD den Kreis A in C, G liegt auf der Verlängerung der gemeinschaftlichen Tangente beider Kreise DC, welche eine innere ist, da A im Scheitelwinkel von DOF liegt.

Ebenso wird, wenn G auf der andern Seite von EF liegt, durch Tangenten an den Kreis A bewiesen, dass G auf der Verlängerung von CD liegen muss *).

3.

(a) *Wenn die Schenkel eines Winkels A von den Kreisen B und C, die entweder beide im concaven, oder beide im convexen Winkel liegen, in den Punkten D und E berührt werden, und BAD = CAE ist, so ist die von D an den Kreis C gehende Tangente DF gleich der von E an den Kreis B gehenden EG.* Fig. 3.

Beweis. Man ziehe BD, CE, und DE, welche den Kreis B zum zweitenmale in H, den Kreis C in J schneidet, und fälle auf dieselbe von A, B, C die Lothe AK, BL, CM. Nun ist:

$\triangle$ ADB $\backsim$ $\triangle$ AEC, also

(α) AD : DB = AE : EC; ferner

$\triangle$ BLD $\backsim$ $\triangle$ DKA und $\triangle$ CME $\backsim$ $\triangle$ CKA

weil je die Seiten des einen Dreiecks auf denen des andern senkrecht stehen, also

AD : DB = AK : DL und

AE : EC = AK : EM, woraus mit (α)

AK : DL = AK : EM also

DL = EM, somit auch DH = EJ.

Folglich ist DJ = DH + HJ = EJ + HJ = EH und daraus DJ . DE = EH . ED, oder $DF^2 = EG^2$, DF = EG.

(b) *Wenn die von einem Punkte D des Kreises B an den Kreis C gezogene Tangente DF gleich ist der von dem Punkte E des Kreises C an den Kreis B gezogenen Tangente EG, und man zieht in D und E Tangenten an die beiden Kreise, die sich in A schneiden, so ist BAD = CAE.*

Beweis. Geht den Gang des Beweises von 3 (a) genau rückwärts. Sollten die Tangenten in D und E sich nicht schneiden, also A im Unendlichen liegen, so wäre

---

*) Der Satz 2, b ist schon wiederholt mehr oder weniger streng bewiesen worden, ungenügend z. B. von Quidde (Programm des Gymnasiums zu Herford 1849), besser von Nagel (Programm der Realanstalt in Ulm 1849). Der obige Beweis, bei dem der Nagel'sche benützt ist, sucht Kürze mit Strenge möglichst zu verbinden; es wäre aber ein noch kürzerer wünschenswerth. Zur vollständigen Einsicht in die Abhängigkeit der Tangentensumme oder -Differenz von der Lage des Punktes G gehören folgende fünf Sätze: 1. G in dem von OC, OE und Bogen CE begrenzten Raum oder dessen Scheitelraum; Tangentensumme kleiner als EF. 2. G auf CD oder EF; Tangentensumme = EF. 3. G im Winkel COK oder dessen Scheitelwinkel; Tangentensumme grösser, Tangentendifferenz kleiner als EF. 4. G auf einer Verlängerung von CD oder EF; Tangentendifferenz = EF. 5. G in einem der unbegrenzten Räume des Winkels COE oder seines Scheitelwinkels; Tangentendifferenz grösser als EF.

ohnedies BAD = CAE = 0. Dies wäre der Fall, wenn die beiden Kreise gleich wären. D und E müssten in diesem Falle Endpunkte zweier entgegengesetzt paralleler Halbmesser sein *).

II. Deduction des Problems.

Wenn drei Kreise A, B, C sich paarweise in den Punkten F, E, D berühren, so kann dies entweder so geschehen, dass einer der Kreise, z. B. C die beiden sich von Aussen berührenden A und B umschliesst (Fig. 4), oder dass er sie von Aussen berührt (Fig. 5).

Fig. 4. Im ersten Fall liegen bekanntlich A, B, F; C, A, E; B, C, D je in gerader Linie, so dass F zwischen A und B, E und D auf die Verlängerungen von CA und CB fallen, und es haben die Kreise A und B eine gemeinschaftliche innere Tangente in F, die Kreise C und A, B und C je eine gemeinschaftliche äussere Tangente in E und D, welche Lothe auf AB, CA, BD sind. Da aber zugleich CE = CD, BD = BF, AF = AE, so folgt (I, 1, d), dass diese drei Tangenten sich in einem Punkte O schneiden, der übrigens auch unendlich fern sein kann, und man hat

1. *Wenn zwei sich von Aussen berührende Kreise A und B von einem dritten C umschliessend berührt werden, so geht die gemeinschaftliche innere Tangente der Kreise A und B durch den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen äusseren Tangenten der Kreise C und A, B und C.*

Ausserdem haben die Kreise A und B noch zwei gemeinschaftliche äussere Tangenten (von denen in der Figur eine, MN, gezeichnet ist), so dass die drei Kreise im Ganzen fünf gemeinschaftliche Tangenten haben.

Fig. 5. Im zweiten Falle liegen wiederum A, B, F; C, A, E; B, C, D in gerader Linie, aber so, dass F, E, D auf AB, CA, BC selbst fallen. Die Lothe in diesen Punkten sind gemeinschaftliche innere Tangenten je eines Kreispaars, und man sieht, wie zuvor, dass dieselben in einem Punkte sich schneiden, woraus sich ergibt:

2. *Wenn drei Kreise A, B, C sich paarweise von Aussen berühren, so schneiden sich die drei durch die Berührungspunkte gehenden gemeinschaftlichen innern Tangenten derselben in einem Punkte.*

Dabei bemerke man noch, dass die Winkel EOF, FOD, DOE, welche die Kreise A, B, C enthalten, je kleiner als 180° sind, und folglich jede der Tangenten z. B. OF durch den Winkel DOE der beiden andern und dessen Scheitelwinkel, nicht durch dessen Nebenwinkel geht.

Ausser der innern hat aber jedes Kreispaar noch zwei gemeinschaftliche äussere Tangenten, so dass die drei Kreise im Ganzen neun gemeinschaftliche Tangenten haben. Und man kann sich nun folgende allgemeine Aufgabe stellen:

---

*) Der Satz 3 (a) ist nach Aussage und Beweis eine nahe liegende Erweiterung des von Nagel (a. a. O. Sz. 1 u. 12) gegebenen.

Es sind drei gerade Linien gegeben. Man soll drei Kreise zeichnen, von denen jeder die beiden andern berührt, so dass jedes Kreispaar eine der drei Geraden zur gemeinschaftlichen Tangente hat.

Dabei kann aber, wenn ein Kreis die beiden andern umschliessen soll, die Aufgabe nicht so gestellt werden, dass eine der drei Geraden innere Tangente der umschlossenen Kreise werden soll. Denn es müssten dann die beiden andern Geraden die äussern Tangenten des umschliessenden und je eines der umschlossenen Kreise werden; und wenn sich nun die drei Geraden nicht in einem Punkte schneiden, so ist die Aufgabe nach (1) unmöglich; schneiden sie sich aber in einem Punkt, so ist sie unbestimmt, indem dann jeder aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte beschriebene Kreis auf den Geraden drei Berührungspunkte von Kreisen bestimmt, welche der Aufgabe entsprechen.

Und ebenso, wenn die drei Kreise sich von Aussen berühren sollen, kann die Aufgabe nicht so gestellt werden, dass die drei Geraden sämmtlich innere Tangenten der drei Kreise werden sollen. Denn auch hier ist die Aufgabe nach (2) unmöglich, wenn die drei Geraden sich nicht in einem Punkte schneiden, und unbestimmt, wenn dies der Fall ist.

Unsere Aufgabe theilt sich also, je nach der Bestimmung, die man den drei Geraden gibt, in drei Aufgaben, von denen die erste wiederum in zwei zerfällt, und lässt sich so aussprechen:

Es sind drei (nicht in einem Punkt sich schneidende) Gerade gegeben. Man soll drei sich paarweise berührende Kreise zeichnen, so dass je eine Gerade gemeinschaftliche Tangente je eines Kreispaares werde, und zwar

A. sollen zwei Gerade gemeinschaftliche Tangenten in den Berührungspunkten der zugehörigen Kreispaare werden, entweder so, dass
   a. zwei Kreise vom dritten umschlossen werden, in welchem Falle zwei Gerade äussere Tangenten in den Berührungspunkten des umschliessenden Kreises werden müssen; oder so, dass
   b. sich die drei Kreise von Aussen berühren;

B. soll eine Gerade gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte des zugehörigen Kreispaares werden, die beiden andern ihre Kreispaare in zwei verschiedenen Punkten berühren, in welchem Falle die drei Kreise sich von Aussen berühren müssen.

C. sollen alle drei Geraden ihre Kreispaare je in zwei verschiedenen Punkten berühren, in welchem Falle sich die drei Kreise ebenfalls von Aussen berühren müssen.

Im Uebrigen überzeugt man sich, wenn man die Analysis dieser Aufgaben unter-

nimmt, sehr bald, dass die Configuration der fünf Tangenten im ersten Falle und noch mehr der neun Tangenten im zweiten Falle unter sich und mit den Kreisen je nach dem Längenverhältniss der Halbmesser eine sehr verschiedene wird; und schliesst daraus, dass man umgekehrt für dieselben drei Geraden sehr verschiedene der Aufgabe entsprechende Kreisternionen wird erhalten können. Wir werden für die Aufgabe A, a vorerst annehmen, dass die zwei umschlossenen Kreise in dem von den drei Geraden gebildeten Dreieck (oder Streifen) liegen; für die Aufgabe C, dass die drei Kreise in dieses Dreieck (Streifen) fallen, so dass in dieser Aufgabe das Malfattische Problem im engern Sinne vorliegt. Von den Aufgaben A, b und B werden wir diejenigen Fälle ins Auge fassen, die zur Lösung der Aufgabe C in ihrer eben angegebenen Beschränkung berücksichtigt werden müssen. Die Erörterung aller möglichen Lösungen bleibt dem Abschnitt VI vorbehalten.

III. Die Aufgaben II, A.

1. Die Aufgabe II, A, a.

Fig. 4. **Analysis.** Es seien OK, OL, KL die gegebenen Geraden, A, B, C die gesuchten Kreise, von denen C die Kreise A und B umschliesst, B und C die OK in D, C und A die OL in E, A und B die KL in M und N und einander in F berühren. Zieht man nun OF, so ist diese nach (II, 1) gemeinschaftliche Tangente der Kreise A und B, und fällt in den Winkel LOK, weshalb sie verlängert die KL zwischen K und L in P schneiden wird, sofern nach der (II, a. E.) gemachten Annahme die Kreise A und B im Dreieck LOK liegen.

Nun ist Kreis A innerer Berührungskreis des Dreiecks LOP, also ist (I, 1, c)

$$OF - PF = LO - LP;$$

Kreis B ist innerer Berührungskreis des Dreiecks KOP, also

$$OF - PF = KO - KP; \text{ somit}$$

$$LO - LP = KO - KP, \text{ oder}$$

$$LP - KP = LO - KO;$$

also ist (I, 1, e) P der Berührungspunkt des innern Berührungskreises von Dreieck LOK. Also ist P und damit OP gegeben, und wir gelangen zu folgender

Construktion. Man halbire die Winkel KOL und OLK, deren Halbirungslinien sich in X schneiden, ziehe KX, fälle auf LK das Loth XP und ziehe OP. Dann ergibt sich Punkt A als Durchschnittspunkt der Halbirungslinie von OPL mit LX; B als Durchschnitt der Halbirungslinie von OPK mit KX, C als Durchschnitt des von A auf OL gefällten Lothes AE mit OX. Beschreibt man nun aus A mit AE, aus B mit dem auf OK gefällten Lothe BD, aus C mit CE Kreise, so sind diese die gesuchten.

Beweis. Kreis A ist innerer Berührungskreis des Dreiecks LOP (I, 1), berührt also auch die LP (in M) und OP (in F); und es ist (I, 1, c)

OF — PF = LO — LP; aber P ist Berührungspunkt des dem Dreieck OLK einbeschriebenen Kreises (I, 1), also

LP — KP = OL — OK oder
LO — LP = KO — KP folglich
OF — PF = KO — KP.

Also ist (I, 1, e) F der Berührungspunkt des dem Dreieck OPK einbeschriebenen Kreises. Dieser Kreis aber ist, da KX den Winkel K halbirt, der Kreis B, der demnach ausser der OK auch die KP (in N) und die OP in F, in letzterem Punkt also auch den Kreis A berührt, und zwar von aussen, weil die beiden Kreise in den zwei Nebenwinkeln bei P liegen. Der Kreis C endlich berührt nicht nur OL und den Kreis A in E, sondern auch weil OC den Winkel LOK halbirt, die OK (in D') so, dass OE = OD'. Es ist aber auch OE = OF = OD; somit OD = OD'; oder Kreis C berührt auch OK und den Kreis B in D. Er umschliesst aber beide Kreise, weil $COL = \frac{1}{2}\ LOK > AOL = \frac{1}{2}\ POL$ und $COK = \frac{1}{2}\ LOK > BOK = \frac{1}{2}\ POK$, und C somit auf den Verlängerungen von EA und DB liegt.

Möglichkeit. Man sieht, dass die Construktion immer möglich ist, und findet leicht die Abänderungen derselben, wenn entweder Punkt O oder einer der Punkte K und L unendlich fern liegt. Man wird im ersten Falle auf den beiden Parallelen LO und KO Stücke = LP und KP abschneiden, im zweiten Falle durch P ein Loth zu beiden Parallelen ziehen, und sich dann sofort überzeugen, dass im ersten Falle (I, 1, k), im zweiten (I, 1, l) zur Anwendung kommt, wornach P als Berührungspunkt des dem Streifen eingeschriebenen Kreises mit LK sich ergibt. Die Construktion kann mit denselben Worten wie oben ausgesprochen werden; für den Beweis wird man die der Analysis entsprechenden Abänderungen ohne Mühe finden.

2. Die Aufgabe II, A, b.

Analysis. Es seien OK, OL, KL die gegebenen Geraden, A, B, C die gesuchten sich von Aussen berührenden Kreise, von denen A und B die LK in M und N und einander in F berühren, während C im Scheitelwinkel von LOK liegt, und demgemäss die verlängerte LO und den Kreis A in E, die verlängerte KO und den Kreis B in D berührt. Fig. 5.

Zieht man nun OF, so ist diese nach II, 2 gemeinschaftliche Tangente von A und B und fällt in den Winkel KOL, weshalb sie verlängert die LK zwischen L und K in P schneiden wird. Dann ist, weil E auf der Verlängerung von LO, A äusserer Berührungskreis des Dreiecks LOP und man hat (I, 1, c)

PF — OF = LO — LP

Kreis B ist äusserer Berührungskreis des Dreiecks KOP, also

PF — OF = KO — KP.

Also ist LO — LP = KO — KP oder
LP — KP = LO — KO, also ist (I, 1, e) P der Berührungs-

punkt des dem Dreieck LOK einbeschriebenen Kreises; folglich P und damit OP gegeben.

Fig. 6. Es kann nun aber der Kreis, welcher die beiden inneren Tangenten berührt, auch im Aussenwinkel an der Spitze des von den drei Tangenten gebildeten Dreiecks liegen. Sind OV, OT, VT die gegebenen Geraden, A, C, B die gesuchten Kreise von denen A und C die VT in R und S und einander in E berühren, während B in einem Nebenwinkel von VOT liegt, die TO und den Kreis C in D, die verlängerte VO und den Kreis A in F berührt; so wird, wenn man OE zieht, diese (II, 2) die Kreise A und C berühren und in den Scheitelwinkel von TOF fallen, also die verlängerte TV in U schneiden. Dann ist, weil D auf TO liegt, C innerer Berührungskreis des Dreiecks TOU und man hat

$$UE - OE = TU - TO$$

A ist, weil F auf der verlängerten VO, äusserer Berührungskreis des Dreiecks VOU, also

$$UE - OE = VO - VU, \text{ somit}$$
$$TU - TO = VO - VU \text{ oder}$$
$$TU + VU = TO + VO$$

also ist (I, 1, g) U der Berührungspunkt des äusseren Berührungskreises am Dreieck VOT, welcher die VO selbst berührt, also U und damit UO gegeben.

Fig. 7. Endlich ist auch noch der Fall in Betracht zu ziehen, der als Grenzfall zwischen den beiden vorigen angesehen werden kann, dass nämlich eine der beiden inneren Tangenten der äusseren parallel ist. Sind wieder OV, OT, VT die gegebenen Geraden, wo diesmal T unendlich fern liegt, A, C, B die gesuchten Kreise, und werden sonst die vorigen Bezeichnungen beibehalten, so wird wieder OE die Kreise A und C berühren und die TV in U so schneiden, dass C Berührungskreis des Streifens SUOD, A äusserer Berührungskreis des Dreiecks VOU ist, also einerseits (I, 1, i)

$$UE - OE = US - OD \text{ andererseits (I, 1, c)}$$
$$UE - OE = VO - VU \text{ also}$$
$$US - OD = VO - VU \text{ oder}$$
$$VU = VO - (US - OD).$$

Zieht man nun Ub senkrecht zu OD, so ist, weil auch SD Loth auf beiden Parallelen, US = bD, somit US — OD = Ob und

VU = VO — Ob, also (I, 1, l) U Berührungspunkt des dem Streifen UVOb einbeschriebenen Kreises, also U, somit OU gegeben.

Aus dieser Analysis geht, wenigstens für die in Betracht gezogenen Configurationen, hervor der

Lehrsatz. *Wenn drei Kreise sich paarweise von Aussen berühren, und man zieht die inneren Tangenten zweier, und eine äussere des dritten Kreispaares, so berührt derjenige Berührungskreis des von den drei Tangenten gebildeten Dreiecks (oder Streifens), welcher in denselben drei Winkeln (oder deren Scheitelwinkeln) liegt, in denen die einzelnen Kreise liegen, die äussere Tangente des dritten Kreispaares in dem Punkte, in welchem sie von der inneren Tangente desselben Kreispaares geschnitten wird.*

Im Folgenden wird die Construktion mit den Buchstaben der Figur 5 ausgesprochen, und der Beweis für diesen Fall geführt, indem es dem Leser überlassen bleibt, die leichten Abänderungen derselben für die beiden andern Fälle aus der Analysis herzuleiten.

Construktion. Man bestimme auf KL den Berührungspunkt P des dem Dreieck KOL einbeschriebenen Kreises, ziehe OP, und construire die äusseren Berührungskreise A und B der Dreiecke LOP und KOP, welche die OP selbst, die LO und KO in E und D berühren, ziehe AE und BD, welche sich verlängert in C schneiden und beschreibe aus C mit CE einen Kreis, so sind die Kreise A, B, C die verlangten. Fig. 5.

Beweis. Kreis A berührt (e. c.) die LP (in M) und die OP in F und zwar als äusserer Berührungskreis an LOP nach (I, 1, c) so, dass

PF — OF = LO — LP; aber nach der Bestimmung des Punktes P ist (I, 1, c)

LO — LP = KO — KP, also

PF — OF = KO — KP, folglich ist (I, 1, f) F Berührungspunkt des äusseren Berührungskreises an △ KOP, welcher die OP selbst berührt. Dieser Kreis ist aber (e. c.) der Kreis B, welcher demnach nicht nur die KP (in N), sondern auch die OP und den Kreis A in F berührt, und zwar von aussen, da die beiden Kreise in den Nebenwinkeln bei P liegen. Daraus folgt sofort OE = OF = OD, und da OEC = ODC = R und OC = OC, so ist auch △ CEO ≅ △ CDO, woraus CE = CD; der aus C mit CE beschriebene Kreis berührt also nicht nur LO und Kreis A in E, sondern auch KO und Kreis B in D. Weil aber E und D auf den Verlängerungen von LO und KO, so liegt C im Scheitelwinkel des Winkels LOK und berührt deshalb die Kreise A und B von Aussen.

Möglichkeit. Die Construktion ist, für alle drei Fälle, immer möglich.

IV. Die Aufgabe II, B.

Analysis. Es seien TK, GK, TG die gegebenen Geraden; A, B, C die gesuchten Kreise, von denen B und C die TK zur gemeinschaftlichen innern Tangente in D haben, während die Kreise A und B einander in F, die GK in M und N, die Kreise A und C einander in E, die TG in R und S berühren. Zieht man noch die beiden andern innern Tangenten, so werden sich diese (II, 2) auf TK in O schneiden, und es müssen OE und OF die TG und GK in ihren Verlängerungen über E und F hinaus treffen, wenn, wie in der Figur angenommen, die drei Kreise ganz innerhalb des Winkels SGN liegen. (Es wäre aber z. B. für OE das Umgekehrte der Fall, wenn statt GS die andere gemeinschaftliche Tangente der Kreise A und C als gegeben angenommen würde.) Schneidet nun OE die TG in U, die GK in L, so bilden die drei Tangenten TO, GL, UL mit den drei Kreisen eine der Configurationen die in (III) betrachtet wurden, je nachdem der Punkt L auf GM über M, oder über G hinaus oder unendlich fern liegt; und wenn daher OF die GK in P trifft, so wird P (III, Lehrsatz) der Berührungspunkt Fig. 5.

eines die drei Tangenten berührenden Kreises sein, dessen Mittelpunkt X der Durchschnitt von KB und LA ist. Analoges gilt aber, wenn OF die TG in V schneidet, von den Tangenten TO, GV, PV und den drei Kreisen, und es wird U der Berührungspunkt eines die drei Tangenten berührenden Kreises sein, dessen Mittelpunkt Y der Durchschnitt von TC und VA ist. Berührt nun TO die Kreise X und Y in a und b, UL den Kreis X in c, PV den Kreis Y in d, so ist

MP = PF = NP = Da (weil NP und Da äussere Tangenten an den Kreisen B und X), und ebenso

RU = UE = SU = Db; somit

MP — RU = ab, also auch MP + MG — (RU + RG) oder

GP — GU = ab.

Also liegt (I, 2, b) G auf der zweiten inneren Tangente der Kreise X und Y, deren Berührungspunkte mit denselben e und f seien. Ferner ist

Pd = PF + Fd = MP + RU = cE + EU = Uc, also (I, 3, b) XGP = YGU. Aber XGP = XGe, YGU = YGf, also PGe = UGf, oder Ge Halbirungslinie des Winkels PGU. Somit kann der Kreis X construirt werden aus den Tangenten TK, GK, Ge; der Kreis Y aus den Tangenten TK, TG, Ge.

Ganz dieselben Schlüsse gelten aber, wenn die drei Kreise nicht in einem Aussenwinkel bei G, sondern wie in Fig. 6, im Winkel G selbst liegen, und ebenso wenn, wie Fig. 7, der Punkt T unendlich fern liegt, und wir gelangen zu folgender

Construktion. Man halbire die drei Winkel bei G, K, T, in denen (oder deren Scheitelwinkeln) die Kreise A, B, C liegen sollen, durch die Geraden GA, KB, TC; den Winkel AGK durch eine Gerade, welche die KB in X, den Nebenwinkel von AGT (in Fig. 6. der Winkel AGT selbst) durch eine Gerade, welche die TC in Y schneidet; beschreibe aus X mit dem auf GK gefällten Lothe GP, aus Y mit dem auf TG gefällten Lothe YU Kreise, ziehe von P an Kreis Y und von U an Kreis X die Tangenten Pd und Uc, welche sich in O schneiden, so, dass Kreis Y im Winkel dPG, Kreis X im Winkel cUG liegt, halbire den Winkel dPG durch eine Gerade, welche die GA in A, dessen Nebenwinkel durch eine Gerade, welche die KB in B, den Nebenwinkel von cUG durch eine Gerade, welche die TC in C schneidet, und beschreibe aus A, B, C mit den auf GK und TG gefällten Lothen AM, BN, CS Kreise, so sind diese die verlangten.

Beweis. Kreis A berührt nicht nur die GK in M, sondern (I, 1) auch die TG und Pd (in R und F). Nun haben Kreis A und Y, da beide sowohl im Winkel dPG als im Winkel UGP liegen (e. c.), Fd und RU zu gemeinschaftlichen äusseren Tangenten, und es ist Fd = RU. Zugleich aber ist, da YGU = XGP = $\frac{1}{4}$ UGP, (I, 3, a) Uc = Pd. Macht man also, auf Uc, UE = UR, so ist Ec = FP = PM, folglich auch wenn L Durchschnitt von Uc mit GP, LE = Lc $\pm$ cE = LP $\pm$ PM = LM, je nachdem L auf der einen oder anderen Verlängerung von GP liegt. Ist aber L unendlich fern, so ist Pc und deshalb auch ME Loth auf den beiden Parallelen Uc und GP. Dies zusammen mit UE = UR und GR = GM ergibt (I, 1, d oder k), dass R, M, E

die Berührungspunkte eines GU, GL, UL berührenden Kreises sind. Nun ist aber der Kreis A derjenige, welcher GU in R, GL in M berührt, also berührt er auch UL in E. Dann ist Oc — Od = Oc + OE — (Od + OF) = Ec — Fd = MP — RU = GM + MP — (GR + RU) = GP — GU = ef (I, 2, a). Also liegt O auf der Verlängerung einer innern gemeinschaftlichen Tangente der Kreise X und Y, und zwar nicht auf GA; denn es würde folgen $\triangle$ OGP $\cong$ $\triangle$ OGU (da OG und die anliegenden Winkel je gleich wären), also GP = GU, Ge = Gf d. h. die Kreise X und Y würden sich berühren und TK mit GA zusammenfallen. Vielmehr liegt (I, 2, b) O auf der Verlängerung von ab. Also ist B äusserer Berührungskreis des Dreiecks KOP; da er (e. c.) nicht nur die GK in N, sondern auch die PO und die TK, auf der O liegt, berührt; die Kreise A und B sind in Bezug auf das Dreieck (den Streifen) LOK nach (einem der Fälle von) III, 2 construirt, und Kreis B berührt nicht nur die GK in N, sondern auch die PO und den Kreis A von aussen in F, sowie die TK (in dem auf der Verlängerung von KO liegenden Punkte D). Ebenso ist C äusserer Berührungskreis (Fig. 6 innerer) des Dreiecks (Streifens) TOU; die Kreise A und C sind in Bezug auf das Dreieck (den Streifen) VOT nach (einem der Fälle von) III, 2 construirt, und Kreis C berührt nicht nur die TG in S, sondern auch die UO und den Kreis A von Aussen in E, sowie die TK (in einem auf der Verlängerung von KO liegenden Punkte D'). Aber es ist einerseits OF = OD, andererseits OE = OD', also, da OF = OE, auch OD = OD'; Punkt D' fällt mit D zusammen, und Kreis C berührt die TK und den Kreis B von Aussen in D.

Möglichkeit. Die Construktion ist für den Fall der Figur 5 möglich, so lange nicht TG = GK, in welchem Falle Punkt X unendlich fern wird. Wenn TG < GK, so fallen die drei Kreise in den Scheitelwinkel von SGN. Für die Fälle der Figuren 6 und 7 ist die Construktion immer möglich.

Dass es immer möglich ist, von P die Tangente Pd an den Kreis Y in der verlangten Weise zu ziehen, erhellt daraus, dass der Punkt P jedenfalls auf der Seite von GA liegt, auf welcher der Kreis Y sich nicht befindet, weshalb man (I, 2, b Beweis) immer eine solche Tangente von P ziehen kann, welche die Gf in ihrer Verlängerung über f schneidet, so dass also f und damit der ganze Kreis in den Winkel dPG hereinfällt.

Aus der Analysis ergibt sich noch folgender

Lehrsatz. *Wenn die Schenkel eines Winkels gemeinschaftliche äussere Tangenten zweier Paare von drei sich gegenseitig berührenden, ganz in den Winkel fallenden Kreisen sind, und man construirt die zwei in den Winkel fallenden Kreise, welche je eine solche äussere Tangente, und die beiden innern Tangenten der zwei andern Kreispaare (die erstere also nach III, Lehrsatz in dem Punkte, in dem sie von ihrer zugehörigen innern Tangente geschnitten wird) berühren, so werden diese beiden Kreise auch von der Halbirungslinie des Winkels berührt, (auf welcher auch der Mittelpunkt des von beiden Schenkeln berührten Kreises liegt).*

Dieser Satz gilt auch, wenn die zwei Kreise, welche je nur einen Schenkel

Fig. 6.

berühren, in dem vom dritten Kreise und den Schenkeln begrenzten Raume liegen. Man hat hier PN = PF = PM = Ec; Wg = WD = Wh = El, also HW — HP = Hg — Wg — (HN — PN) = PN — Wg = Ec — El = cl, und H liegt auf der Verlängerung der zweiten innern Tangente der Kreise X und Z. Dass diese aber zugleich Halbirungslinie des Winkels H ist, wird ganz wie in der Analysis bewiesen, indem man zeigt, dass Wa = Pm.

Fig. 7. Und der Satz gilt auch, wenn der Winkel in einen Streifen übergeht. Man stelle sich in Fig. 7. H unendlich fern vor, so ist XP parallel ZW, also XPW = ZWP. Aus der ganz wie in der Analysis zu beweisenden Gleichheit der Tangenten Wa und Pm wird man aber (wie im Beweis zu I, 3, b) schliessen, dass die beiden Kreise von PW gleiche Sehnen abschneiden, was mit XPW = ZWP zusammen ergibt, dass die Halbmesser beider Kreise gleich sind. Ferner findet man wie oben PN — Wg = cl. Zieht man nun durch B eine Parallele zu MN und hg, welche von den verlängerten PX und WZ in i und k getroffen wird, so ist Xi = Pi — PX = Wk — WZ = ZK. Daraus folgt, dass in p, dem Durchschnitt von ZX und ik, sowohl ZX als ik halbirt sind. Im Halbirungspunkt von ZX wird aber auch lc halbirt da Zl = Xc, und da ik = Bi — Bk = PN — Wg = lc, so ist pi = pl, woraus, mit Xp = Zp und Xip = Zlp = R, $\triangle$ Xip $\cong \triangle$ Llp, Xi = Zl = XP, d. h. Bi berührt den Kreis X, und ebenso den Kreis Z, was aus der Congruenz der Dreiecke Zkp und Xcp folgt. Also berührt die (durch B gehende) Halbirungslinie des Streifens die beiden Kreise X und Z.

V. Die Aufgabe II, C, oder das Malfattische Problem.

Fig. 5. **Analysis.** Gegeben seien die Geraden GH, JG, HJ, gefunden die Kreise A B, C, die einander in F, E, D, und von denen A und B die GH in M und N, C und A die JG in S und R, B und C die HJ in g und h berühren, und welche ganz im Dreieck GHJ liegen. Man bemerke, dass für diese Annahme die drei Kreise in Bezug auf jeden der Winkel G, H, J die Fig. 5. angenommene Configuration haben müssen, woraus folgt, dass die, in einem Punkt O (II, 2) sich schneidenden, inneren Tangenten OF, OE, OD, die GH, JG, HJ in ihren Verlängerungen über F, E, D hinaus in P, U, W schneiden werden. Deshalb sind die beiden in III und IV ausgesprochenen Lehrsätze anwendbar, d. h. die drei in das Dreieck fallenden Kreise X, Y, Z, welche die inneren Tangenten je zweier Kreispaare und die äussere des dritten berühren, werden nicht nur diese dritte je im Schnittpunkt mit der inneren Tangente des dritten Kreispaares, sondern auch die Halbirungslinien der beiden anliegenden Dreieckswinkel berühren. Damit können diese Kreise construirt werden, und es ergibt sich überdies der

Lehrsatz. *Wenn man die drei Winkel eines Dreiecks GHJ durch drei Gerade halbirt, welche sich (I, 1) in einem Punkte o schneiden, und in die drei Dreiecke GHo, JGo, HJo die drei Kreise X, Y, Z einbeschreibt, so geht die zweite gemeinschaftliche*

innere Tangente je zweier dieser Kreise durch den Berührungspunkt des dritten mit der zugehörigen Dreiecksseite.

Dieser Satz ist jedoch durch das Bisherige nur für den Fall bewiesen, dass sich in das Dreieck drei Malfattische Kreise einzeichnen lassen; er wird daher seinen vollständigen Beweis erst mit dem Beweis der Construktion erhalten, und es fragt sich, ob ein Beweis desselben ohne die Malfattischen Kreise möglich ist.

Construktion. Man halbire die drei innern Winkel des Dreiecks GHJ durch drei Gerade, welche sich bekanntlich in einem Punkte o schneiden; beschreibe in die Dreiecke oGH und oJG die Kreise X und Y; ziehe vom Berührungspunkte P des Kreises X und der GH an den Kreis Y die Tangente Pd, und vom Berührungspunkte U von Y mit JG an den Kreis X die Tangente Uc so, dass die Kreise in den Winkeln dPG, cUG liegen; ziehe ferner die zweite gemeinschaftliche Tangente ab beider Kreise, welche die GH in K, die JG in T schneidet; halbire den Winkel dPG durch eine Gerade, welche die Go in A trifft, ziehe KX, welche die Halbirungslinie des Winkels dPH in B, und TY, welche die Halbirungslinie des Winkels cPJ in C schneidet, und beschreibe endlich aus A, B, C mit den auf GH und JG gefällten Lothen AM, BN, CS Kreise, so sind diese die verlangten.

Beweis. Wenn $GP > GU$, also $Ge > Gf$, so fällt a in den geschlossenen Raum GeP, also K auf GP, T auf eine der Verlängerungen von GU, oder auch ins Unendliche, und es sind, da KX, GX, TY, GY die Winkel aKP, AGP, bTU, AGU halbiren, die Kreise jedenfalls in Bezug auf Dreieck (Streifen) TGK nach IV construirt. Ist $GP < GU$, so fällt K auf eine Verlängerung von GP, oder ins Unendliche, T auf GU selbst, und es ist wiederum dasselbe der Fall, wenn man nur in IV T und K mit einander vertauscht. (Ueber den Fall dass $GU = GP$ cf. Möglichkeit.) Und da auch der Durchschnitt von TK mit GA auf ef, also in den Winkel HGJ fällt, so liegen in diesem auch die drei Kreise; und es berühren A, B, C einander von aussen (in F, E, D), A und B die GH (in M und N), C und A die JG (in S und R). Dabei sind Pd, Uc, TK die gemeinschaftlichen inneren Tangenten der drei Kreise, und es liegt jedenfalls N auf der Verlängerung von GP, S auf der Verlängerung von GU.

Zu beweisen bleibt nun noch, dass die Kreise B und C auch die HJ berühren. Fig. 5.6.7.
Es gibt zwei gemeinschaftliche äussere Tangenten an die Kreise B und C, von denen jedenfalls eine von der KD in deren Verlängerung über D hinaus in einem Punkte W getroffen wird, der im Winkel G, aber ausserhalb des geschlossenen Raumes GNFDES liegt. Diese Tangente muss daher jedenfalls einen der Schenkel z. B. GS in der Verlängerung über S hinaus schneiden, was im Punkt J′ geschehe, während der Durchschnittspunkt mit dem andern Schenkel H′ auf die Verlängerung von GP oder PG, oder auch unendlich fern fallen kann. In allen drei Fällen schneiden sich die durch C gehende Halbirungslinie des Winkels WJ′S und die durch B gehende des Winkels (oder Streifens) WH′N auf GA in einem Punkte o′ und berühren (IV, Lehrsatz) die Kreise Y und X. Dabei muss der Punkt o′ sowohl auf der Verlängerung von Gf liegen (weil $o'GJ' + o'J'G < 2R$, also o′J′G ein Dreieck, dem der Kreis Y einbe-

schrieben ist), als auf der von Ge (wenn H′ auf der Verlängerung von GP aus ähnlichem Grunde, wie so eben; wenn H′ auf der Verlängerung von PG oder unendlich fern nach der im Beweis von I, 2, b angewendeten Betrachtung). Nun ist, wenn H′ auf der Verlängerung von GP liegt, $Bo'C = 2R - (o'J'H' + o'H'J') = 2R - \frac{1}{2}(GJ'H' + GH'J') = 2R - (R - \frac{1}{2} UGP) = R + \frac{1}{2} UGP$; wenn H′ auf der Verlängerung von PG, $Bo'C = o'J'H' + o'H'J' = GJ'H' + R - \frac{1}{2} GJ'H' + \frac{1}{2} GH'J' = R + \frac{1}{2}(GJ'H' + GH'J') = R + \frac{1}{2} UGP$; wenn H′ unendlich fern, $Bo'C = o'J'H' = H'J'G + R - \frac{1}{2} H'J'G = UGP + R - \frac{1}{2} UGP = R + \frac{1}{2} UGP$. Nun ist aber $Xo'A = \frac{1}{2} Ao'B$ (weil o′A und o′B den Kreis X berühren): $Yo'A = \frac{1}{2} Ao'C$ (aus ähnlichem Grund); also $Xo'Y = \frac{1}{2}(Ao'B + Ao'C) = \frac{1}{2}(4R - Bo'C) = 2R - \frac{1}{2} Bo'C = \frac{3}{2} R - \frac{1}{4} UGP$. Ganz auf dieselbe Art ergibt sich aber, dass auch Punkt o auf der Verlängerung von Ge über e und f hinaus liegt, und dass auch $XoY = \frac{3}{2} R - \frac{1}{4} UGP$. Also liegen sowohl o′ als o auf der Peripherie eines über XY beschriebenen, den Winkel $\frac{3}{2} R - \frac{1}{4} UGP$ fassenden Kreisabschnittes, der, weil XY die ef schneidet, für beide Punkte nach derselben von G abgekehrten Seite hin zu beschreiben ist. Beide liegen aber auch auf GA, welche die XY schneidet, also mit der Peripherie des Kreisabschnittes nur einen Punkt gemein hat. Also fallen beide Punkte zusammen, und daher auch die zweiten von ihnen an die Kreise X und Y gehenden Tangenten. Daher fällt auch J′ auf J, H′ auf H, und HJ ist gemeinschaftliche äussere Tangente der Kreise B und C.

Möglichkeit. Da der Fall, dass TK parallel GA, hier niemals eintreten kann, so bleibt noch der Fall zu betrachten, dass TK mit GA zusammenfällt, was eintreten wird, wenn GP = GU, woraus GH = GJ. Hier wird man zuerst die beiden Kreise B und C in die Dreiecke GWH und GWJ einbeschreiben, von denen man leicht beweisen wird, dass sie einander berühren, und zu denselben den Kreis A nach irgend einer leicht zu ermittelnden Construktion finden.

VI. Geschichtliche Notizen über das Problem und allgemeine Erörterung desselben.

Die Aufgabe II, C hat ihren Namen von dem berühmten italienischen Mathematiker Malfatti, welcher dieselbe mit einer auf trigonometrische Rechnung gegründeten Lösung um den Anfang dieses Jahrhunderts veröffentlichte, ohne jedoch den Gang seiner Rechnung im Einzelnen mitzutheilen. Das schwierige Problem hat sodann in den nächsten Jahrzehnten mehrere ausgezeichnete Geometer beschäftigt, und es sind Lösungen desselben von Gergonne und Lavernède (Annales de Mathématiques Tom. I), Lehmus (Lehrbuch der Geometrie 1820), Crelle (Sammlung mathematischer Aufsätze 1821), Grunert (Supplemente zu Klügels Wörterbuch, Bd. 1, p. 29), Scheffler (Grunerts Archiv Bd. 16, mit der Grunertschen im Wesentlichen übereinstimmend), Schellbach (Sammlung mathematischer Aufgaben 1863) gegeben worden. Diese sämmtlichen Lösungen sind trigonometrische, und haben deshalb, so elegant sie auch, wie namentlich die neueste von Schellbach, sein mögen, den gemeinschaftlichen

Mangel, dass die Einsicht in den Zusammenhang zwischen dem Gegebenen und Gefundenen nicht durch die Anschauung vermittelt wird. Dasselbe gilt auch von der algebraisch-geometrischen Lösung von Adams (Programm der Gewerbeschule zu Winterthur 1848).

Die einzige Lösung, welche sogleich den Eindruck macht, dass sie auf rein geometrischem Wege gefunden und beweisbar sei, ist die von Jacob Steiner im Jahre 1826 (Crelle's Journal I, p. 178 ff.) ohne Beweis gegebene, eine der glänzenden Leistungen, mit denen der grosse Geometer seine Laufbahn eröffnet hat.

Die „neue Lösung" von Adams (das Malfattische Problem neu gelöst, Winterthur 1846) ist eine durch Rechnung gefundene und ebenso bewiesene Abänderung der Steiner'schen; und es sei hier gelegentlich bemerkt, dass man auf verschiedene interessante und rein geometrisch lösbare Aufgaben geführt wird, wenn man den Versuch macht, das Problem zunächst auf die Construktion zweier Kreise zurückzuführen. Man kann z. B. zwei Kreise, die je zwei Dreiecksseiten und einander berühren, zeichnen, wenn gegeben die Summe, oder die Differenz ihrer Halbmesser, oder die Richtung ihrer Centrale, oder der Abstand ihrer Berührungspunkte auf der von beiden berührten Seite, oder der Punkt, in welchem diese Seite von der innern Tangente beider Kreise getroffen wird; und dann die in diesen Aufgaben als gegeben angenommenen Stücke für den Fall zu bestimmen suchen, dass die zwei Kreise Malfattische Kreise werden sollen, wobei man denn freilich nur für die zwei letzten Fälle auf einfache Bestimmungen kommen wird.

Beweise der Steiner'schen Construktion sind gegeben worden von Zornow (Crelle Journ. X, 400 ff.), abgeändert von Adams (Das Malfattische Problem neu gelöst p. 16 ff.), ein Beweis, der unter die Categorie der rechnenden Beweise zu zählen ist; von Plücker (Crelle XI, 117 ff.), der die Hauptsache, dass die Winkelhalbirenden Tangenten der Hilfskreise X, Y, Z sind, ziemlich mühselig mit analytischer Geometrie beweist; endlich ein rein geometrischer von Quidde (Herforder Programm von 1849, und gleichlautend in Grunerts Archiv Bd. 15). Diese Beweise sind aber sämmtlich blosse Analysen.

Die im vorigen Abschnitt gegebene Construktion ist die Steiner'sche, nur so im Ausdruck abgeändert, wie es für den vom Verfasser gefundenen Beweis erforderlich schien. Der Beweis unterscheidet sich von den dem Verfasser bekannt gewordenen dadurch, dass er nicht nur rein geometrisch ist, sondern auch ganz auf den elementaren und elementar bewiesenen Sätzen (I) beruht, sowie dadurch, dass nicht blos eine Analysis der Aufgabe, wie von den oben angeführten Mathematikern, sondern auch der Beweis der Construktion gegeben ist. Es ist vielleicht gerade bei dieser Aufgabe besonders schwierig, aus der Analysis den Beweis herzuleiten, und dürfte namentlich auch bei der Quidde'schen Analysis nicht leicht sein.

Steiner hat seiner Construktion noch eine Bemerkung über die Zahl der möglichen Auflösungen beigefügt (a. a. O. p. 179), die, nur mit veränderten Buchstaben, so lautet:

„Die Aufgabe lässt keinesweges bloss eine Auflösung zu. Es können vielmehr Fig. 1.

die drei gesuchten Kreise auch ausserhalb des gegebenen Dreiecks liegen und dessen verlängerte Seiten berühren, also z. B. über der Seite BC im Raume O′, oder über der Seite CA im Raume O″, oder über der Seite AB im Raume O‴. — Jeder der vier Punkte O, O′, O″, O‴, z. B. der Punkt O bildet mit den Eckpunkten des gegebenen Dreiecks ABC die drei Dreiecke AOB, BOC, COA. Die drei Seiten eines jeden dieser Dreiecke können von vier bestimmten Kreisen berührt werden, so dass also zu diesen drei Dreiecken zwölf bestimmte Kreise gehören. Es scheinen, mittelst dieser zwölf Kreise, nach Art der vorstehenden Auflösung wenigstens acht verschiedene Auflösungen möglich zu sein. Und da ein gleiches in Bezug auf jeden der drei übrigen Punkte O′, O″, O‴ Statt findet, so lässt die Aufgabe wenigstens 32 verschiedene Auflösungen zu, welche alle der obigen Auflösung ähnlich sind.

Unter diesen 32 Auflösungen sind die speciellen Fälle, wo zwei der drei gesuchten Kreise eine Seite des gegebenen Dreiecks in einem und demselben Punkt berühren, nicht mitgerechnet, sondern es giebt solcher specieller Fälle ausserdem noch 48.“

Es ist dem Verfasser nicht bekannt, dass eine nähere Ausführung dieser Steiner'schen Bemerkung von Jemanden gegeben worden wäre. Adams scheint dieselbe übersehen zu haben, wenn er (im angeführten Programm p. 2) sagt: „Die vorliegende Aufgabe ist indess bis jetzt, und auch von mir im Jahre 1846, zu einseitig aufgefasst worden. Die Auflösung beschränkt sich auf den einzigen Fall, wo die Seiten des Dreieckes selbst, nicht ihre Verlängerungen berührt werden. Lässt man jene Verallgemeinerung zu, wie es dem Geiste der neueren Geometrie durchaus gemäss ist, so giebt es nicht nur einen, es giebt sechszehn verschiedene Fälle der Lösung. In diesem umfassenden Sinne die Aufgabe zu behandeln, ist der Zweck vorliegender Abhandlung.“ Es werden sodann im Weiteren zehn Lösungen der (allgemein gefassten) Aufgabe II, C und sechs Lösungen der Aufgabe II, A, a unseres zweiten Abschnittes als „vollständige Lösung“ eines Problems zusammengefasst, das im Ganzen wenigstens 86 Auflösungen hat!

Im Folgenden versucht der Verfasser, eine allgemeine Lösung des in seiner ganzen Ausdehnung genommenen Problems in Abschnitt II zu geben, und nicht nur die Zahl der Lösungen zu bestimmen, sondern auch die sich ergebenden Kreise nach ihrer Lage zu charakterisiren. Dabei ist es aber natürlich nothwendig, die Fälle II, A, B, C gesondert zu betrachten.

Zur Analysis der Aufgaben II, A genügt der Lehrsatz des Abschnittes III, welcher allgemein so lautet:

1. *Wenn drei Kreise A, B, C sich paarweise berühren, so bildet je eine gemeinschaftliche Tangente, die ihr zugehöriges Kreispaar in zwei verschiedenen Punkten berührt, mit den gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten der beiden anderen Kreispaare ein Dreieck (Streifen), in welchem die Halbirungslinien derjenigen Winkel (oder Aussenwinkel), in denen (oder deren Scheitelwinkeln) die drei Kreise liegen, sich in einem Punkte schneiden, dem Mittelpunkte eines Berührungskreises des Dreiecks, welcher die erstgenannte Tangente in demjenigen Punkte berührt, in welchem sie von der zugehörigen innern Tangente desselben Kreispaares geschnitten wird.*

Dieser Satz lässt sich allgemein so beweisen (wobei der Beweis wörtlich auf jede beliebige Configuration passt): Da die Kreise A und B sowohl von dem Kreise C als der Geraden MN berührt werden, so ist die Potenzlinie OFP beider Kreise ein Aehnlichkeitsstrahl nicht nur von C und MN, sondern auch von C und jedem die MN in P berührenden Kreise. Zieht man daher CO, welche das auf MN in P errichtete Loth in X schneidet, und beschreibt mit XP den Kreis X, so ist O ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise C und X. Also berühren OD und OE, welche den Kreis C berühren, auch den Kreis X, und die Kreise A, B, C liegen jedenfalls in denselben Winkeln (oder Aussenwinkeln) des Dreiecks OKL (oder deren Scheitelwinkeln), in denen der Kreis X liegt. Fig. 5.

Man erhält damit folgende allgemeine Auflösung der Aufgaben II, A.

Man halbire irgend drei solche Winkel (oder Aussenwinkel) des Dreiecks ABC, deren Halbirungslinien sich in einem Punkte O schneiden, fälle von O auf diejenige Seite BC, welche ihr Kreispaar in zwei verschiedenen Punkten berühren soll, das Loth OD und ziehe AD. Dann sind sowohl der Durchschnitt der Halbirungslinie des Winkels ADC mit CO, und der Durchschnitt der Halbirungslinie von dessen Nebenwinkel mit BO, als auch der Durchschnitt der erstern Linie mit BO und der der andern mit CO Mittelpunkte von je zwei der Aufgabe entsprechenden Kreisen, zu denen sofort je der dritte leicht zu construiren ist. Und zwar wird je der eine dieser dritten Kreise seine zwei zugehörigen umschliessen, der andere die seinigen von Aussen berühren. Fig. 1, a.

Nun giebt es aber vier Punkte O, und auf BC zu jedem einen Punkt D; man erhält also acht mal drei Kreise. Und da jede der Seiten des Dreiecks zu derjenigen Tangente gewählt werden kann, welche ihr Kreispaar in zwei verschiedenen Punkten berührt, so haben die Aufgaben II, A zusammen vierundzwanzig Auflösungen.

Bezeichnen wir die drei Kreise je nach den Winkeln des Dreiecks, in denen (oder deren Aussen- oder Scheitelwinkeln) sie liegen, mit A_1, B_1, C_1, so liegen, wenn AD gezogen wird, die einen zwei Kreise B_1 und C_1 im Dreieck und werden vom dritten, der im Winkel A liegt, umschlossen; die andern zwei Kreise B_1 und C_1 berühren zwar einander innerhalb des Dreiecks, dagegen die BA und CA auf den Verlängerungen, und der dritte, im Scheitelwinkel von A liegende berührt sie von Aussen;

wenn AD′ gezogen wird, liegen die einen zwei Kreise B_1 und C_1 in den Aussenwinkeln an B und C so, dass sie BC in den Verlängerungen, BA und CA selbst, und einander im Scheitelwinkel von A berühren, der dritte sie von Aussen berührende liegt im Winkel A; die andern zwei Kreise B_1 und C_1 liegen ausserhalb des Dreiecks im Raum O′, und der dritte sie umschliessende liegt im Winkel A;

wenn AD″ gezogen wird, berührt von den ersten zwei Kreisen B_1 und C_1 der Kreis B_1, welcher im Winkel B liegt, die BA und BC auf den Verlängerungen, der Kreis C_1, welcher im Winkel ACD″ liegt, die BC auf der Verlängerung, die CA selbst, und den Kreis B_1 im Raume O″, während der im Winkel CAF″ liegende Kreis A_1 beide umschliesst; von den andern zwei Kreisen B_1 und C_1 liegt der eine B_1 im Winkel

B und berührt die BA selbst, der andere C_1 liegt im Winkel ACD'', berührt CA und BC auf den Verlängerungen und den Kreis B_1 im Raum O_{11}, während A_1 im Winkel E'''AB liegt, und die beiden andern von Aussen berührt;

wenn endlich AD''' gezogen wird, so ist die Lage der beiden Kreisternionen der so eben betrachteten ganz analog. Und ganz eben so wird man die Lagen der Kreisternionen ermitteln, wenn CA und AB an die Stelle von BC gesetzt werden.

Zur Analysis der Aufgabe II, B dient der in IV ausgesprochene Lehrsatz, der ebenfalls allgemeine Geltung hat, und demgemäss lautet:

2. *Wenn drei Kreise sich paarweise von Aussen berühren, so berührt die Halbirungslinie des Winkels zweier äusserer gemeinschaftlicher Tangenten zweier verschiedener Kreispaare, die durch den Mittelpunkt des von beiden berührten Kreises geht, die beiden nach Lehrsatz VI, 1 construirten Kreise, welche diese Tangenten berühren.*

Einen allgemeinen Beweis dieses Lehrsatzes, der für alle Configurationen mit denselben Worten passte, hat der Verfasser nicht gefunden. Wenn der Beweis so geführt werden soll, wie im Abschnitt IV geschehen ist, so wird jedesmal der Lehrsatz I, 3, b zur Anwendung kommen; statt des Satzes I, 2, b aber nach Umständen der analoge beizuziehen sein, dass ein Punkt auf einer äusseren gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise zwischen den Berührungspunkten liegt, wenn die Summe der von ihm an beide Kreise gezogenen Tangenten gleich einer dieser äusseren Tangenten ist.

Damit ergiebt sich folgende allgemeine Lösung der Aufgabe II, B (bei deren Aussage übrigens nicht auf den Beweis, sondern nur auf möglichste Kürze Rücksicht genommen ist, und in Betreff welcher nebenbei bemerkt sei, dass eine ziemliche Genauigkeit der Zeichnung erforderlich ist, wenn man die drei Kreise richtig bekommen will):

1. *Man halbire diejenigen Winkel des Dreiecks ABC, in welchen (oder deren Scheitelwinkeln) je einer der gesuchten Kreise liegen soll, und welches drei solche sein müssen, deren Halbirungslinien sich nicht in einem Punkte schneiden.*
2. *Die Halbirungslinie desjenigen Winkels A, dessen Schenkel die äusseren Tangenten werden sollen, schneide die Gegenseite BC in G. Man beschreibe zwei solche Berührungskreise Z und Y der Dreiecke ABG und ACG, welche entweder beide in den Hälften des Winkels A, oder beide in deren Nebenwinkeln, und zugleich in den halbirten Winkeln B und C liegen (wobei übrigens für jeden Winkel auch sein Scheitelwinkel eintreten kann), und welche die AB in I, die AC in H berühren.*
3. *Man ziehe von I an Kreis Y eine Tangente, welche die AC in K schneidet, ziehe KY, welche die AG in A_1 trifft, so ist A_1 Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise.*
4. *Construirt man diesen Kreis, welcher die AC in L, die AB in M berührt, macht, auf AC, $HN = HL$, und, auf AB, $IP = IM$, und errichtet auf AC und AB in N und P Lothe bis zu den Durchschnitten C_1 und B_1 mit CY und BZ, so sind die aus C_1 und B_1 mit C_1N und B_1P beschriebenen Kreise die zwei andern gesuchten.*

Um die Zahl der möglichen Auflösungen zu ermitteln, bemerke man Folgendes:

Man kann halbiren

I. Den inneren Winkel bei A und dazu

A. den äussern bei B und den innern bei C; dabei können liegen
1. Z und Y in den Winkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gezogen werden
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente,
2. Z und Y in den Nebenwinkeln der Winkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gezogen werden
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente,

B. den äussern bei C und den innern bei B; dabei können liegen
1. Z und Y in den Winkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gezogen werden
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente,
2. Z und Y in den Nebenwinkeln der Winkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gehen
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente,

II. Den äussern Winkel bei A und dazu

A. die innern Winkel bei B und C; dabei können liegen
1. Z und Y in den Aussenwinkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gehen
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente,
2. Z und Y in den Nebenwinkeln der Aussenwinkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gehen
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente,

B. die äusseren Winkel bei B und C; dabei können liegen
1. Z und Y in den Aussenwinkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gehen
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente,
2. Z und Y in den Nebenwinkeln der Aussenwinkelhälften bei A, und von I an Kreis Y gehen
a. die eine Tangente,
b. die andere Tangente.

Man erhält demnach 16 Ternionen von Kreisen $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$, wenn man den Winkel A (oder seinen Aussenwinkel) zu demjenigen nimmt, dessen Schenkel die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten zweier Kreispaare werden sollen. Da man aber dazu ebenso

gut den Winkel B oder C nehmen kann, so ergeben sich die 48 von Steiner behaupteten Lösungen.

Allein so einfach scheint in Wahrheit die Sache doch nicht zu liegen. In den Fällen I, A, 2 und I, B, 2 kann es nämlich geschehen, dass der Punkt I auf der Peripherie des Kreises Y oder innerhalb desselben liegt, und man somit nur eine, oder gar keine Tangente an den Kreis Y hat. Eine leichte geometrische Betrachtung zeigt, dass dann mit dem Punkte H in Bezug auf den Kreis Z dasselbe der Fall sein muss, dass es also dann in der That keine, oder nur eine Auflösung der Aufgabe gibt. Wenn B_1 (und also auch Z) im Aussenwinkel bei B liegen soll, also im Falle I, A, 2, findet sich als Bedingung für die Möglichkeit

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{4}+\sqrt{2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{A}{4}-1\right)}\leqq\operatorname{ctg}\frac{1}{2}B,$$

und dem entsprechend für den Fall I, B, 2

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{4}+\sqrt{2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{A}{4}-1\right)}\leqq\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C.$$

Diese Formeln, in denen A, B, C die innern Dreieckswinkel bedeuten, zeigen, dass A jedenfalls mehr als das Doppelte von B, beziehungsweise von C betragen muss, und man schliesst daraus sofort weiter, dass von den zwölf Lösungen, die hier in Betracht kommen, wenn man der Reihe nach A, B, C zu den Winkeln nimmt, deren Schenkel die äusseren Tangenten werden sollen, mindestens sechs, nach Umständen aber selbst alle zwölf wegfallen.

Aehnliches kann eintreten in dem Falle II, A, 2. Man sieht, dass wenn hier C_1 im Winkel C selbst liegt, B_1 jedenfalls im Scheitelwinkel von B liegen muss, und umgekehrt, und findet als Bedingung für die Möglichkeit

$$\operatorname{tg}\frac{\pi+A}{4}+\sqrt{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi+A}{4}-1\right)}\leqq\operatorname{tg}\frac{B}{2},\text{ respective}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi+A}{4}+\sqrt{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi+A}{4}-1\right)}\leqq\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Diese Formeln, in welchen A, B, C wieder die innern Winkel sind, zeigen, dass B, respective C jedenfalls grösser als $\frac{\pi+A}{2}$ sein muss, wornach von den hier in Betracht kommenden sechs Auflösungen jedenfalls zwei, nach Umständen (z. B. für ein spitz- oder rechtwinkliges Dreieck) selbst alle sechs wegfallen.

In den übrigen Fällen scheint die Lösung immer möglich zu sein, und es werden sich demnach (wenn man nur ungleichseitige Dreiecke in Betracht zieht, vgl. IV. Möglichkeit) die von Steiner behaupteten 48 Lösungen jedenfalls auf 40, nach Umständen aber auf 30 reduciren *).

*) Die obigen Formeln können auch von dem Wurzelzeichen befreit werden, wenn man nach $\operatorname{cotg}\frac{A}{4}$, resp. $\operatorname{tg}\frac{\pi+A}{4}$ auflöst; dem Verfasser schien aber die obige Form die geeignetere. Die Ableitung derselben übergeht er, ist aber bereit, sie auf Verlangen an passendem Ort mitzutheilen.

Ueber die Lage der resultirenden Kreise findet sich Folgendes:

I. Kreis A_1 liegt jedenfalls im Winkel A selbst, nicht in dessen Scheitelwinkel.

A. Kreis B_1 liegt im Aussenwinkel an BC, Kreis C_1 im Winkel C selbst.

1. Die Berührungspunkte L und N der Kreise A_1 und C_1 mit AC liegen auf derselben Seite von A.

a. Die Tangente, welche AG in der Verlängerung schneidet, gibt den Kreis A_1 in dem von den Schenkeln des Winkels A und den Kreisen B_1 und C_1 begrenzten Raume.

b. Die andere Tangente, welche AG selbst schneidet, gibt den Kreis A_1 jenseits von den Kreisen B_1 und C_1, so dass die Berührungspunkte L und M auf den Verlängerungen von AH und AJ liegen, und der Kreis B_1 in dem von den Schenkeln seines Winkels und dem Kreis A_1 begrenzten Raume eingeschlossen ist.

2. Hier muss nach dem Obigen Winkel A grösser als 2B sein. L und N liegen zu verschiedenen Seiten von A.

a. Man erhält zwei kleinere Kreise A_1 und C_1 und einen grösseren Kreis B_1,

b. zwei grössere Kreise A_1 und C_1 und einen kleineren Kreis B_1.

Die Lagen der Kreise für die Fälle I, B sind denen für die Fälle I, A vollkommen analog.

II. A. Hier liegt, je nachdem AB kleiner oder grösser als AC, A_1 im Aussenwinkel an AB, B_1 im Scheitelwinkel von B, C_1 im Winkel C selbst; oder A_1 im Aussenwinkel an AC, B_1 im Winkel B selbst, C_1 im Scheitelwinkel von C.

1. L und N liegen auf derselben Seite von A.

a. Analog I, A, 1, a.

b. Analog I, A, 1, b.

2. L und N liegen zu beiden Seiten von A, dabei muss entweder B oder C grösser als $\frac{\pi + A}{2}$ sein, und man erhält im erstern Falle

a. durch die eine Tangente einen grössern Kreis A_1 und einen kleinern Kreis B_1,

b. durch die andere Tangente einen grössern Kreis B_1 und einen kleinern Kreis A_1. Der Kreis C_1 liegt für a. und b. in dem von Kreis A_1 und dem Winkel C begrenzten Raume.

B. 1. a. Die eine Tangente gibt L und N auf verschiedenen, M und P auf derselben Seite von A in der Folge A, M, P, also liegen Kreis A_1 und B_1 in den Aussenwinkeln an AB, und zwar B_1 in dem von seinem Winkel und A_1 begrenzten Raume, C_1 im Aussenwinkel an BC;

b. die andere Tangente gibt M und P auf verschiedenen, L und N auf derselben Seite von A in der Folge A, L, N, und es liegen A_1 und C_1 in den Aussenwinkeln an AC, und zwar C_1 in dem von seinem Winkel und dem Kreis A_1 begrenzten Raume, B_1 im Aussenwinkel an BC.

2. a. Die eine Tangente gibt L und N zu verschiedenen, M und P auf der gleichen Seite von A in der Folge A, P, M; und es liegen A_1 und B_1 in den Aussenwinkeln an AB, und zwar B_1 in dem von A_1, AB und den Verlängerungen von CA und CB begrenzten Raume, C_1 im Aussenwinkel an BC.

b. Die andere Tangente gibt L und N sowohl, als M und P zu verschiedenen Seiten von A, und es liegen C_1 und A_1 in den Aussenwinkeln an AC, B_1 im Aussenwinkel an BC, A_1 in dem von B_1, C_1 und AC begrenzten Raume.

Auf ganz analoge Art finden sich die Lagen der Kreisternionen, wenn statt des Winkels A der Winkel B oder C der Winkel der äusseren Tangenten wird.

Für die allgemein gefasste Aufgabe II, C gilt folgender Lehrsatz, die Verallgemeinerung des in (V) ausgesprochenen:

3. *Wenn man drei solche Winkel eines Dreiecks ABC halbirt, deren Halbirungslinien in einem Punkte O sich schneiden und zu zwei Dreiecken AOB, AOC solche Berührungskreise Z und Y construirt, welche beide in gleichen Winkeln an A liegen, so geht die zu AO symmetrische zweite gemeinschaftliche Tangente beider Kreise durch den Berührungspunkt desjenigen Berührungskreises X des Dreiecks BOC mit BC, welcher in denjenigen beiden Winkeln bei B und C liegt, die den Winkeln, in denen Z und Y liegen, gleich sind.*

Fig. 1. Wenn also z. B. der innere Kreis Z des Dreiecks AO″B construirt ist, so kann als zugehöriger Kreis Y des Dreiecks AO″C derjenige äussere gewählt werden, welcher AO″ selbst berührt. Dann ist, weil AO″ innere Tangente beider Kreise, die zweite innere Tangente derselben zu ziehen, und dieselbe wird die BC im Berührungspunkte desjenigen äusseren Kreises X von Dreieck BO″C treffen, der CO″ selbst berührt, da dieser in den mit ABO″ und ACO″ gleichen Winkeln O″BD″ und O″CD″ des Dreiecks BO″C liegt.

Zu demselben Kreise Z kann aber als zugehöriger Kreis Y auch derjenige äussere Kreis des Dreiecks AO″C gewählt werden, der AC selbst berührt. Dann ist AO″ äussere Tangente beider Kreise; es ist deshalb die zweite äussere zu ziehen, welche die BC im Berührungspunkte des inneren Kreises X von Dreieck BO″C treffen wird, da dieser in den mit ABO″ und ACO′ gleichen Winkeln O″BC und O″CB liegt.

Dabei ist klar, dass jedesmal auch zu den Kreisen X und Z der Kreis Y, und zu den Kreisen X und Y der Kreis Z in gleicher Weise gehört, so dass also die zu BO″ symmetrische zweite gemeinschaftliche Tangente der Kreise X und Z durch den

Berührungspunkt des Kreises Y mit AC, und die zu CO'' symmetrische zweite Tangente der Kreise X und Y durch den Berührungspunkt des Kreises Z mit AB geht.

Es ist (vgl. Bemerkung zum Lehrsatz in Abschnitt V) fraglich, ob es einen einfachen, natürlichen und allgemeinen Beweis dieses Lehrsatzes giebt, der von den zugehörigen Malfatti'schen Kreisen unabhängig ist. Wenn ein solcher gefunden wird, so wird es möglich sein, den in V gegebenen Beweis bedeutend zu vereinfachen, und zugleich auf die allgemeine Construktion auszudehnen, die folgendermassen gefasst werden kann:

1. *Man halbire die drei Winkel des Dreiecks ABC, in welchen die gesuchten Kreise liegen sollen, und welches solche sein müssen, deren Halbirungslinien sich in einem Punkte O schneiden.*
2. *Man construire zwei solche Berührungskreise Z und Y der Dreiecke AOB und AOC, welche in gleichen Winkeln bei A liegen, und von denen Y die AC in G, Z die AB in H berührt.*
3. *Man ziehe die zu AO symmetrische zweite gemeinschaftliche Tangente der Kreise Z und Y, welche die AC in J, die AB in K schneidet.*
4. *Man ziehe JY, welche die CO in C_1, KZ, welche die BO in B_1 schneidet, und beschreibe aus C_1 und B_1 mit den auf AC und AB gefällten Lothen C_1L und B_1M Kreise; schneide, auf AB, $HP = HM$ ab, und errichte auf derselben in P das Loth PA_1 bis zu dem Durchschnitt mit AO; so sind, wenn man noch aus A_1 mit A_1P einen Kreis beschreibt, A_1, B_1, C_1 die gesuchten Kreise.*

Die Zahl der möglichen Auflösungen ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Zum Dreieck AOB gehören vier Kreise Z, zu deren jedem sich in der verlangten Weise zwei Kreise Y des Dreiecks AOC construiren lassen, so dass also zu zwei zusammengehörigen Dreiecken AOB und AOC acht Paare von Kreisen Z und Y gehören. Zu jedem dieser Paare gehört ein einziger bestimmter Kreis X des Dreiecks BOC, und es ergeben sich somit acht Ternionen von zusammengehörigen Kreisen Z, Y, X. Da aber jedesmal auch die Paare X und Z, Y und X demselben Gesetze unterliegen, so kann, wenn nun z. B. mit einem Paare X und Z angefangen würde, doch nur ein solcher Kreis Y resultiren, der mit dem zugehörigen Kreise Z ein schon dagewesenes Paar bildet, so dass also für eine Dreiecksternion AOB, COA, BOC acht, und nicht mehr als acht zugehörige Kreisternionen sich ergeben. Da es aber vier Punkte O, also vier Dreiecksternionen giebt, so hat man 32 Kreisternionen Z, Y, X, und weil jede solche Ternion eine Ternion von Malfatti'schen Kreisen giebt, so hat die Aufgabe, wie Steiner angiebt, 32 Lösungen, die sämmtlich immer möglich sind.

Im Folgenden werde ein für allemal vorausgesetzt, dass Z zu AOB, Y zu COA, X zu BOC gehört, und z. B. der innere Berührungskreis des Dreiecks AOB einfach mit „Inkreis", der äussere, welcher AB selbst berührt, mit „Ankreis an AB" bezeichnet.

Auch bemerke man, dass immer der Kreis X dem Kreis A_1, der Kreis Y dem Kreis B_1, der Kreis Z dem Kreis C_1 entspricht, so dass also, wenn die Lage der Ternion Z, Y, X in Bezug auf ihre Dreiecke analog ist z. B. der Lage der Ternion Y, Z, X

in Bezug auf ihre Dreiecke, auch die Lage der Kreise, C_1, B_1, A_1, in den Winkeln C, B, A analog sein wird der Lage der Kreise B_1, C_1, A_1 in den Winkeln B, C, A.

Damit ergeben sich folgende Lagen der resultirenden Kreise:

I. Die Kreise A_1, B_1, C_1 sollen in den inneren Winkeln des Dreiecks ABC (oder deren Scheitelwinkeln) liegen, wornach die Dreiecks-Ternion AOB, COA, BOC zu nehmen ist. Dann kann sein:

1. Z Inkreis, Y Inkreis, X Inkreis,
2. Z Inkreis, Y Ankreis an CO, X Ankreis an CO,
3. Z Ankreis an BO, Y Inkreis, X Ankreis an BO,
4. Z Ankreis an BO, Y Ankreis an CO, X Ankreis an BC.
5. Z Ankreis an AO, Y Ankreis an AO, X Inkreis,
6. Z Ankreis an AO, Y Ankreis an AC, X Ankreis an CO,
7. Z Ankreis an AB, Y Ankreis an AO, X Ankreis an BO,
8. Z Ankreis an AB, Y Ankreis an CA, X Ankreis an BC.

Hier findet man

1. Ternion 1 ergiebt die drei Malfatti'schen Kreise im engern Sinn.
2. Ternion 2 giebt die Kreise A_1 und B_1 so, dass sie die AC und BC auf den Verlängerungen berühren, der Kreis C_1 liegt im innern Winkel in dem von diesem und den Kreisen A_1 und B_1 begrenzten Raume. Damit sind zugleich die Ternionen 3 und 5 erledigt.
3. Die Ternion 4 giebt die Kreise B_1 und C_1 so, dass beide die BC selbst berühren, der Kreis A_1 schneidet BC und berührt AB und AC auf den Verlängerungen. Damit sind zugleich die Ternionen 6 und 7 erledigt.
4. Für Ternion 8 berühren die drei Kreise die zugehörigen Seiten je auf den Verlängerungen, und schneiden je die dritte Seite.

Die Berührungspunkte der Kreise unter sich liegen in sämmtlichen acht Fällen innerhalb des Dreiecks.

II. Von den Kreisen A_1, B_1, C_1 soll einer z. B. A_1 im innern Winkel A, dagegen B_1 und C_1 in den Aussenwinkeln bei B und C liegen. Dann ist die Dreiecksternion AO'B, CO'A, BO'C zu nehmen, und man hat:

1. Z Inkreis, Y Inkreis, X Ankreis an BC,
2. Z Inkreis, Y Ankreis an CO', X Ankreis an BO',
3. Z Ankreis an BO', Y Inkreis, X Ankreis an CO',
4. Z Ankreis an BO', Y Ankreis an CO', X Inkreis,
5. Z Ankreis an AO', Y Ankreis an AO', X Ankreis an BO,
6. Z Ankreis an AO', Y Ankreis an CA, X Ankreis an BO',
7. Z Ankreis an AB, Y Ankreis an AO', X Ankreis an CO',
8. Z Ankreis an AB, Y Ankreis an CA, X Inkreis.

1 Die Ternion 1 ergibt die Kreise B_1 und C_1 in dem Raume O', den Kreis A_1 in dem von den beiden andern und den Schenkeln seines Winkels bebrenzten Raume, so dass er BC schneidet.

2. Die Ternion 2 ergiebt den Kreis B_1 im Raume O', den Kreis C_1 dagegen über diesen Raum übergreifend, so dass er CB auf der Verlängerung berührt und B_1 in dem von ihm abgegrenzten Raume liegt. Der Kreis A_1 liegt ähnlich wie zuvor. Damit ist zugleich die Ternion 3 erledigt.
3. Ternion 4 ergiebt die Kreise B_1 und C_1 im Raume O', den Kreis A_1 in dem nicht begrenzten Raum seines Winkels, so dass er mit den Dreiecksseiten die Kreise B_1 und C_1 einschliesst.
4. Ternion 5 ergiebt die Kreise B_1 und C_1 in den Aussenwinkeln an BA und CA, sie berühren diese Seiten selbst, schneiden dann CA und BA und berühren sich im Scheitelwinkel von A. Der Kreis A_1 liegt im nicht abgegrenzten Raum dieses Scheitelwinkels.
5. Ternion 6 ergiebt die Kreise B_1 und C_1 wieder in den Aussenwinkeln an BA und CA, es berührt aber nur der Kreis C_1 die CA selbst, während B_1 die BA auf der Verlängerung berührt. A_1 liegt im Scheitelwinkel von A im abgegrenzten Raum. Damit ist zugleich Ternion 7 erledigt.
6. Ternion 8 endlich ergiebt die Kreise B_1 und C_1 ähnlich, wie Ternion 5, den Kreis A_1 dagegen im abgegrenzten Raum des Scheitelwinkels von A.

Vollkommen analog sind natürlich die Lagen der resultirenden Kreise, für die beiden andern äussern Punkte O, so dass das Bisherige zur Charakterisirung sämmtlicher 32 Lösungen genügt.

Die allgemeine Aufgabe des Abschnittes II hat also wenigstens 86 und höchstens 96 verschiedene Lösungen, wenn die drei Geraden ein (ungleichseitiges) Dreieck bilden.

VII. Die Steiner'sche Verallgemeinerung der Malfatti'schen Aufgabe.

Hatte die Malfatti'sche Aufgabe solche Schwierigkeiten dargeboten, dass vorzügliche Geometer zufrieden waren, durch langwierige trigonometrische Rechnungen erträgliche Ausdrücke für die Halbmesser der gesuchten Kreise zu finden, so mochte kaum Jemand daran denken, die jedenfalls weit schwierigere Aufgabe lösen zu wollen, wenn statt der drei geradlinigen Tangenten drei Kreise gegeben wären, die von den gesuchten berührt werden sollten.

Steiner aber hat, zugleich mit seiner Lösung der Malfatti'schen Aufgabe, (a. a. O. p. 180 f.) diese Aufgabe gestellt und gelöst. Er stellt die Aufgabe in folgender Form:

Wenn drei Kreise M_1, M_2, M_3 gegeben sind, so soll man drei andere Kreise m_3, m_2, m_1 finden, welche einander in den Punkten b_1, b_2, b_3 berühren, und von welchen zugleich m_3 die Kreise M_1 und M_2, m_2 die Kreise M_3 und M_1, m_1 die Kreise M_1 und M_2 berühre.

Zum Verständniss der Steiner'schen Auflösung erinnere man sich einiger Sätze,

die Steiner a. a. O. seinen Construktionen vorausschickt und die wenigstens heutzutage grösstentheils allbekannt sind. Dieselben werden übrigens hier, dem speciellen Zweck entsprechend, nicht in ihrer allgemeinen Geltung ausgesprochen, auch Einiges beigefügt, was bei Steiner nicht steht.

1. Ist A_3 der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise M_1 und M_2, von denen keiner den andern einschliesst, und sind P_1 und P_2 solche Punkte eines beliebigen durch A_3 gehenden Aehnlichkeitsstrahls, in denen zwei antiparallele Halbmesser M_1P_1 und M_2P_2 beider Kreise endigen, so sind P_1 und P_2 sowohl die Berührungspunkte eines die beiden Kreise gleichartig berührenden Kreises T, als die Schnittpunkte eines gemeinschaftlichen Orthogonalkreises R der beiden Kreise. Und hievon gelten auch die Umkehrungen.

2. Das Rechteck $A_3P_1 \times A_3P_2$ ist für jeden durch A_3 gehenden Aehnlichkeitsstrahl von constanter Grösse. Nennt man dasselbe mit Steiner die „gemeinschaftliche Potenz der beiden Kreise M_1 und M_2 in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A_3“ und bezeichnet diese mit q^2, so kann man

3. Aus A_3 mit Halbmesser q einen Kreis A_3 beschreiben, den „äusseren Potenzkreis der Kreise M_1 und M_2.“ Man beweist von demselben leicht, dass er Orthogonalkreis sowohl aller Kreise R, als auch aller Kreise T ist. Alle Mittelpunkte R liegen aber bekanntlich auf einer Geraden, der „Potenzlinie“ der Kreise M_1 und M_2, da die Kreise R Orthogonalkreise von M_1 und M_2 sind; sie liegen aber auch auf der Potenzlinie der Kreise M_1 und A_3, weil die Kreise R auch Orthogonalkreise von A_3 und M_1 sind, also haben die Kreise M_1, M_2 und A_3 eine gemeinschaftliche Potenzlinie, sie bilden einen „Büschel“, und wenn zwei derselben sich schneiden, so geht auch der dritte durch die Durchschnittspunkte der beiden ersten.

Sind die beiden Kreise M_1 und M_2 gleich, also A_3 unendlich fern, so geht der Potenzkreis in die Potenzlinie der beiden Kreise über.

4. Die äussern Aehnlichkeitspunkte A_3, A_2, A_1 der Kreise M_1 und M_2, M_3 und M_1, M_2 und M_3 liegen bekanntlich auf einer Geraden; die 3 Potenzlinien dieser Kreise schneiden sich in einem Punkte, dem „Punkte der gleichen Potenzen“ der Kreise M_1, M_2, M_3. Aus 3 folgt aber, dass dieser Punkt auch in Bezug auf die Kreise A_3, A_2, A_1 gleiche Potenzen hat. Weil aber die Potenzlinie zweier Kreise auf der Centrale senkrecht steht, und die Centralen der drei Kreise A_3, A_2, A_1 in eine Gerade zusammenfallen, so fallen auch die drei Potenzlinien dieser Kreise, die alle durch jenen Potenzpunkt gehen müssen, in eine Gerade zusammen. Die Kreise A_3, A_2, A_1 bilden einen Büschel.

Die Steiner'sche Construction lautet nun:

„1. Man suche die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte A_3, A_2, A_1, welche zu den drei gegebenen Kreisen, paarweise genommen, gehören, und construire die zu diesen Aehnlichkeitspunkten gehörigen Potenzkreise A_3, A_2, A_1, welche sich in einem bestimmten Punkte D schneiden werden.

2. Hierauf beschreibe man die drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von denen der erste die

drei Kreise M_1, A_2, A_3, der zweite die drei Kreise M_2, A_3, A_1, und der dritte die drei Kreise M_3, A_2, A_1 berührt.

3. Ferner beschreibe man einen Kreis, dessen Peripherie (b_1 B_1 β_1) durch den Berührungspunkt B_1 der Kreise M_1 und μ_1 geht, und welcher die Kreise μ_2, μ_3 berührt, jedoch so, dass er den Kreis μ_3, welcher von dem kleineren (M_3) der beiden Kreise M_2, M_3 abhängig ist, einschliessend berührt.

4. So ist endlich derjenige Kreis m_2, welchen man so beschreibt, dass er die Kreise M_1, M_3 und den Kreis (b_1 B_1 β_1) berührt, einer der gesuchten Kreise.

Die beiden übrigen gesuchten Kreise findet man auf ähnliche Weise. Z. B. der Kreis m_3 kann aus der vorstehenden Construktion unmittelbar gefunden werden, wenn man statt des Kreises m_2 einen Kreis m_3 beschreibt, welcher die Kreise M_1, M_2 und den Kreis (b_1 B_1 β_1) berührt. Es ist zu bemerken, dass die beiden Kreise m_2 und m_3 den Hilfskreis (b_1 B_2 β_3) in einem und demselben Punkt b_1 berühren."

Dies die Steiner'sche Construktion, an der nur etwa das auszusetzen ist, dass Steiner nicht erwähnt hat, dass der Punkt D auch imaginär werden kann. Will man das vermeiden und überhaupt eine der Steiner'schen ähnliche Figur bekommen, so wähle man die Kreise M_1, M_2, M_3, ausser einander liegend, aber so, dass M_1', M_2, M_3 ein spitzwinkliges Dreieck wird, und construire die Kreise μ_1, μ_2, μ_3 so, dass z. B μ_1 in dem von A_2 und A_3 gegen M_1 hin gebildeten Winkel liegt, und letzteren Kreis von aussen berührt.

Auch diese Construktion hat Steiner ohne irgend eine Spur von Beweis gegeben, und nur die Bemerkung hinzugefügt, dass die „vielen" verschiedenen Auflösungen, welche diese Aufgabe zulasse, im Allgemeinen der vorstehenden ähnlich seien, sowie den leicht zu führenden Nachweis, dass seine Construktion der Malfatti'schen Aufgabe als specieller Fall der vorliegenden angesehen werden könne.

Der Verfasser ist mit der Litteratur der neueren Geometrie nicht hinlänglich vertraut, und hat zu wenig Gelegenheit, ausgedehntere Nachsuchungen anzustellen, als dass er irgend vollständige Angaben darüber machen könnte, was für diese Aufgabe und den Beweis der Steiner'schen Construktion seither geschehen ist. Bei einer Durchsicht des Crelle'schen Journals und des Grunert'schen Archivs hat er nur, im XI. Bande der ersteren Zeitschrift, eine Analysis von Plücker gefunden, die im Folgenden näher beleuchtet werden soll.

Plücker handelt von der Malfatti'schen Aufgabe und der Steiner'schen Verallgemeinerung derselben in den Abschnitten IV und VI „analytisch-geometrischer Aphorismen" (a. a. O. p. 117 ff. und p. 356 ff.); wozu, als den Abschnitt VI vorbereitend, auch der Abschnitt V, (p. 219 ff.) und theilweise der Abschnitt II (Bd. X, p. 293 ff.) gehören.

In der folgenden Darstellung der Plücker'schen Analysis sollen, der leichteren Vergleichung wegen, die Steiner'schen Bezeichnungen, soweit sie ausreichen, beibehalten werden. Eine weitere Figur kann der Verfasser diesem Aufsatze nicht beigeben, und er verzichtet darauf um so lieber, als es, wie das Folgende zeigen wird, gerade hier von Werth ist, dass, wer sich für die Sache interessirt, selbst zeichne. Zunächst wird

sich jedermann drei von Aussen sich berührende Kreise m_1, m_2, m_3, dann einen Kreis M_1, welcher m_2 und m_3, einen Kreis M_2, welcher m_3 und m_1 und einen Kreis M_3, welcher m_1 und m_2 von Aussen berührt, leicht herstellen.

Plücker zeigt nun zunächst, dass, wenn m_2 und m_3 sich in b_1 berühren, und die durch b_1 gehende Tangente beider Kreise den Kreis M_1 in einem Punkte P_1 schneidet, man jederzeit einen Kreis, den wir, in Uebereinstimmung mit unseren früheren Bezeichnungen, X nennen wollen, construiren kann, welcher den Kreis M_1 in dem Punkte P_1, und zugleich die beiden gemeinschaftlichen innern Tangenten der Kreispaare m_1 und m_3, m_2 und m_1 berührt. Dies ist richtig, und kann, ganz analog dem zu Lehrsatz (VI, 1) von uns gegebenen Beweise, so leicht gezeigt werden, dass Jeder den Beweis sofort finden wird. Construirt man nun auch zu den Kreisen M_2 und M_3 die entsprechenden Kreise, die Y und Z heissen mögen, so haben die Kreise X, Y, Z drei gemeinschaftliche innere Tangenten, die sich in einem Punkte, dem Potenzpunkt der Kreise m_1, m_2, m_3 schneiden. Also haben, wird weiter geschlossen, die Kreise X, Y, Z noch drei andere innere gemeinschaftliche Tangenten, die sich ebenfalls in einem Punkte schneiden. Auch das ist richtig, und der Lehrsatz, auf dem diese Behauptung beruht, ist eine einfache Folgerung aus dem oben (I, 2, b) Bewiesenen.

„Es kommt also", heisst es weiter, „nur darauf an, die drei in M (so nennt Plücker den gemeinschaftlichen Durchschnitt der zweiten Tangententernion) sich schneidenden geraden Linien zu kennen, um, wenn die Kreise M_1, M_2, M_3 gegeben sind, zunächst die Kreise X, Y, Z, und dann die verlangten Kreise m_1, m_2, m_3 zu construiren."

„Wenn die drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 einander gleich sind, so wird man durch eine etwas ermüdende Eliminationsrechnung — die der in einer Note dem IV. Paragraphen beigefügten ähnlich ist (es ist das die oben in unserem Abschnitt VI erwähnte), und die ich hier nicht unternehme, weil ich glaube, dass sie sich durch eine einfache allgemeine Betrachtung wird ersetzen lassen — finden, dass für diesen Fall die drei in M sich schneidenden geraden Linien die gemeinschaftlichen Chorden (Potenzlinien) je zweier der drei gegebenen Kreise sind."

Es ist schade, dass Plücker von seinem eigenen, in den „Aphorismen" wiederholt ausgesprochenen Grundsatze, nichts unbewiesen zu lassen, (a. a. O. X, p. 298 Anm., XI, p. 126 Anm.) gerade hier, am schwierigsten Punkte, abgewichen ist; und es wäre das um so mehr zu bedauern, wenn es sich herausstellen sollte, dass die von ihm weggelassene, „etwas ermüdende" Eliminationsrechnung so ermüdend wäre, dass sonst gar Niemand damit zu Stande käme.

Und so scheint es in der That sich zu verhalten. Die Plücker'sche Behauptung ist ohne Zweifel falsch; die drei Potenzlinien der Kreise M_1, M_2, M_3 fallen nicht susammen mit der zweiten Ternion gemeinschaftlicher innerer Tangenten der Kreise X, Y, Z; diese Kreise sind nicht die Steiner'schen Kreise μ_1, μ_2, μ_3; die Punkte, deren ersten wir oben mit P_1 bezeichnet haben, sind nicht die Punkte B Steiners; der Plücker'sche Punkt M (in der Analysis) ist nicht der Steiner'sche Punkt D.

Dem vollständigen direkten Beweis dieser Gegenbehauptung des Verfassers würde

ohne Zweifel der Beweis der Steiner'schen Construktion vorhergehen müssen, ein Beweis, den auch der Verfasser nicht zu führen vermag. Er hat sich aber durch sorgfältige Zeichnungen von der Unrichtigkeit der Plücker'schen Behauptung überzeugt, und wer sich für die Sache interessirt, wird, wenn er nachzeichnet, sich um so gewisser mit dem Verfasser einverstanden erklären müssen, je ungleicher er die Halbmesser der Kreise m_1, m_2, m_3 wählt. Ein indirekter Beweis aber, der wenigstens grosse Wahrscheinlichkeit bietet, wird weiter unten geführt werden.

Natürlich muss demgemäss auch die Plücker'sche Construktion unrichtig ausfallen. Sie lautet:

„1. Man beschreibe die Potenzlinien der drei gegebenen gleichen Kreise M_1, M_2, M_3, welche sich in irgend einem Punkte D alle drei schneiden.

2. Man beschreibe drei neue Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von welchen jeder einen der gegebenen ausserhalb berührt, und ausserdem die beiden Potenzlinien der letztgenannten und jedes der beiden übrigen gegebenen.

3. Die drei Potenzlinien der drei gegebenen Kreise sind alsdann innere gemeinschaftliche Tangenten der drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3. Man ziehe hiernach die übrigen innern gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise. Es werden sich dieselben alsdann in einem und demselben Punkte schneiden. (Diesen Punkt nennt Plücker N.)

4. Jeder der gesuchten Kreise m_1, m_2, m_3 berührt alsdann zwei der letztgenannten Geraden, und ist daher leicht zu construiren.

Vereinfachungen der vorstehenden Construktion bieten sich von selbst dar, wenn man berücksichtigt, dass die letztgenannten drei Geraden durch die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 der drei Kreispaare M_1 und μ_1, M_2 und μ_2, M_3 und μ_3 gehen."

Diese Construktion stimmt in den zwei ersten Absätzen mit der Steiner'schen überein, da für drei gleiche Kreise M die Potenzkreise in die Potenzlinien übergehen, sie weicht aber in den zwei letzten Absätzen von derselben ab, und man wird durch dieselbe um so weniger drei Kreise m erhalten, die der Aufgabe entsprechen, je ungleichseitiger man das Dreieck M_1 M_2 M_3 nimmt. Dies wird sich auch darin zeigen, dass die inneren Tangenten der zweiten Ternion an den Kreisen μ keineswegs durch die Punkte B_1, B_2, B_3 gehen werden.

Construirt man dagegen nach der Steiner'schen Anweisung drei Kreise, von denen der erste durch B_1 geht und μ_2 und μ_3 berührt, der zweite durch B_2 geht und μ_1 und μ_3 berührt, der dritte durch B_3 geht und μ_1 und μ_2 berührt, so wird man, bei gehöriger Genauigkeit der Zeichnung, drei richtige Kreise m_1, m_2, m_3 erhalten.

Für den Uebergang von der Construktion bei drei gleichen Kreisen M zu der bei drei ungleichen Kreisen hat Plücker im Abschnitt V der „Aphorismen" unter dem Titel „Ueber ein neues Uebertragungsprincip" auf analytisch-geometrischem Wege eine Reihe von Sätzen entwickelt, von denen (nach Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Band, 4. Buch, § 14, Nr. 13 und 14) vorher und nachher mehrfach und namentlich

umfassend in neuerer Zeit von Möbius unter dem Titel „Die Lehre von der Kreisverwandtschaft“ gehandelt worden ist. Der Verfasser, welcher das Buch von Möbius nicht kennt, stellt im Folgenden die für den vorliegenden Zweck nothwendigen Sätze in synthetischer Entwicklung zusammen.

1. Wenn in einer Ebene von einem Punkte S, dem Centrum, Strahlen SA, SB, SC ... nach den Punkten A, B, C ... eines beliebigen Systems gezogen sind, und man bestimmt auf den Richtungen SA, SB, SC ... (nicht auf den entgegengesetzten, wie wir zur Vereinfachung annehmen wollen) die Punkte A_1, B_1, C_1 ... so, dass

$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1 = SC \cdot SC_1 \ldots = q^2$$

wo q eine constante Strecke bedeutet, so entspricht dem System ABC ... ein zweites System $A_1B_1C_1\ldots$. Jedem Punkt des einen Systems entspricht ein bestimmter Punkt des andern Systems, zwei verschiedenen Punkten des einen Systems entsprechen zwei verschiedene Punkte des andern Systems, abgesehen von den unendlich fernen Punkten beider Systeme, denen je im andern System einzig das Centrum S entspricht. Je zwei Punkte A und B des einen Systems und die entsprechenden A_1 und B_1 des andern liegen auf der Peripherie eines Kreises. Der aus S mit Halbmesser q beschriebene Kreis (von Plücker Hilfskreis genannt) ist Orthogonalkreis aller dieser Kreise.

2. Jeder Curve des einen Systems entspricht eine bestimmte Curve des andern Systems; zwei sich schneidenden Curven des einen Systems entsprechen zwei sich schneidende Curven des andern Systems so, dass den Schnittpunkten der Curven des einen Systems die Schnittpunkte der entsprechenden Curven des andern Systems entsprechen. Sind insbesondere solche Schnittpunkte im ersten Systeme unendlich nahe, so sind es auch die entsprechenden Schnittpunkte des andern, d. h. der Berührung zweier Curven in einem System entspricht eine Berührung derselben Ordnung der entsprechenden Curven im andern System.

3. Jedem Kreise des einen Systems entspricht ein Kreis des andern Systems. Denn gehen durch das Centrum die Sekanten SAa, SBb, SCc ... des einen Kreises, so ist

$$SA \cdot Sa = SB \cdot Sb = SC \cdot Sc \ldots = p^2,$$

wenn p^2 die Potenz des Centrums in Bezug auf den Kreis, aber auch

$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1 = SC \cdot SC_1 \ldots = q^2$$

also:

$$\frac{Sa}{SA_1} = \frac{Sb}{SB_1} = \frac{Sc}{SC_1} \ldots = \frac{p^2}{q^2}$$

also sind die Systeme abc.. und $A_1B_1C_1$ ähnlich, und da abc.. ein Kreis, so ist auch $A_1B_1C_1$.. ein Kreis. Dabei sind die Halbmesser des zweiten Kreises nach $A_1, B_1, C_1 \ldots$ denen des ersten nach a, b, c ... parallel, denen nach A, B, C ... antiparallel; S ist ein Aehnlichkeitspunkt beider Kreise, und zwar der äussere oder innere, je nachdem S ausserhalb oder innerhalb des ersten Kreises liegt; der Hilfskreis ist ein Potenzkreis beider Kreise.

Einem Kreis mit einem unendlich fernen Punkt, d. h. einer Geraden entspricht ein durch S gehender Kreis, dessen Tangente in S der Geraden parallel ist, und umgekehrt; wovon man sich auch noch besonders überzeugen kann (cf. Baltzer a. a. O.).

Geraden, welche sich in einem Punkte schneiden, entsprechen Kreise, die sich in S und ausserdem noch einem zweiten Punkte schneiden; parallelen Geraden entsprechen Kreise, die sich in S berühren. Gerade die durch S gehen, entsprechen sich selber.

4. Wenn zwei Kreise A und B des einen Systems sich in C schneiden, so schneiden sich die entsprechenden Kreise D und E des andern Systems im entsprechenden Punkte C_1 unter (entgegengesetzt) gleichen Winkeln. (Man wähle den Punkt S z. B. ausserhalb beider Kreise so, dass BC in den Winkel SCA fällt.) Nun sind AC und DC_1 (3) antiparallel, also $ACC_1 = DC_1C$; ebenso $BCC_1 = EC_1C$, woraus durch Subtraktion $ACB = DC_1E$. (Diese Winkel sind von entgegengesetzter Drehungsrichtung, also eigentlich $ACB = -DC_1E = EC_1D$.) Also sind auch die Winkel der Kreise A und B denen der Kreise D und E (entgegengesetzt) gleich.

5. Dem (äusseren) Potenzkreis zweier Kreise (von denen keiner den anderen einschliesst) des einen Systems, entspricht der (äussere) Potenzkreis der entsprechenden Kreise des andern Systems. Denn den Orthogonalkreisen der Kreise A und B entsprechen Orthogonalkreise der Kreise D und E (4). Dem gemeinschaftlichen Orthogonalkreise der erstern Orthogonalkreise, d. h. dem Potenzkreis von A und B, entspricht der gemeinschaftliche Orthogonalkreis der andern Schaar, d. h. der Potenzkreis von D und E.

6. Wählt man, für drei Kreise M_1, M_2, M_3, zum Centrum den gemeinschaftlichen Durchschnitt D der drei (äussern) Potenzkreise A_3, A_2, A_1, so werden die Potenzkreise der den Kreisen M_1, M_2, M_3 in einem zweiten System entsprechenden Kreise zu geraden Linien (3); also sind die letzteren Kreise einander gleich.

Die entwickelten Sätze bieten ein Mittel, solche Lehrsätze und Construktionen, die sich auf gerade Linien in Verbindung mit Kreisen beziehen, und keine metrischen Relationen enthalten, überzutragen auf solche, die sich auf in einem Punkt sich schneidende Kreise in Verbindung mit andern Kreisen beziehen. Im Satz 6 hat man ausserdem ein Mittel, solche Lehrsätze und Construktionen, welche sich auf drei einander gleiche Kreise beziehen, und keine metrischen Relationen enthalten, überzutragen auf solche, die sich auf drei beliebige Kreise beziehen.

Demgemäss hat nun Plücker für die allgemeine Aufgabe folgende Construktion angegeben, (wo wir immer soweit möglich die Steiner'schen Bezeichnungen beibehalten).

1. Man beschreibe aus den äusseren Aehnlichkeitspunkten je zweier der gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 als Mittelpunkten die äusseren Potenzkreise A_3, A_2, A_1, welche sich bekanntlich in denselben beiden Punkten D' und D schneiden.

2. Man beschreibe einen neuen Kreis μ_1, welcher die Kreise M_1, A_2, A_3, einen Kreis μ_2, welcher die Kreise M_2, A_1, A_3, und einen Kreis μ_3, welcher die Kreise M_3, A_2, A_1 so berührt, dass die Berührung von μ_1 und μ_2 mit A_3, von μ_3 und μ_1 mit A_2, von μ_2 und μ_3 mit A_1 eine ungleichartige ist.

3. Man beschreibe drei neue Kreise, welche alle durch einen der beiden Punkte D' oder D, etwa durch den erstern derselben gehen, und die respective die Kreise μ_1 und μ_2, μ_3 und μ_1, μ_2 und μ_3 ungleichartig berühren. Diese Kreise, die wir durch

$(\mu_1\mu_2)$, $(\mu_3\mu_1)$, $(\mu_2\mu_3)$ bezeichnen, schneiden sich dann noch in einem zweiten Punkte. (Diesen Punkt nennt Plücker N.).

4. Von den verlangten Kreisen berührt alsdann der erste, m_1, die vier Kreise M_3, M_2, $(\mu_1\mu_2)$ und $(\mu_3\mu_1)$, der zweite, m_2, die vier Kreise M_1, M_3, $(\mu_1\mu_2)$ und $(\mu_2\mu_3)$, und der dritte, m_3, die Kreise M_1, M_2, $(\mu_3\mu_1)$ und $(\mu_2\mu_3)$.

Im Folgenden sagt Plücker von der Steiner'schen Construktion, dass sie im Wesentlichen mit der seinigen übereinstimme, und fügt hinzu: „Was bei der Aussage der eben genannten Construktion befremden muss, ist, dass mit keiner Silbe angedeutet ist, dass die oben (von uns) mit A_3, A_2, A_1, $(\mu_1\mu_2)$, $(\mu_3\mu_1)$, $(\mu_2\mu_3)$ bezeichneten Kreise alle sechs (und nicht blos die drei ersten) durch einen und denselben Punkt gehen. Denn eben dadurch ist doch die Construktion der allgemeinen Aufgabe mit der Construktion der Malfatti'schen verknüpft."

Allerdings ist das der unterscheidende Punkt beider Construktionen, der Plücker'schen und der Steiner'schen. Aber eben in diesem unterscheidenden Punkt ist die Plücker'sche Construktion falsch; die Plücker'schen Kreise $(\mu_1\mu_2)$ u. s. w. sind nicht identisch mit den Steiner'schen (b_1 B_1 β_1) u. s. w.; und die letztern gehen durch keinen der beiden Punkte D oder D', (ausgenommen wenn die drei gegebenen Kreise M sich in einem Punkte schneiden, der dann selbst einer der Punkte D ist). Es muss in der That auffallen, dass Plücker nicht wenigstens die sehr genaue Steiner'sche Zeichnung im ersten Bande des Journals näher angesehen hat: dort geht der Kreis b_1 B_1 β_1 an dem Punkte D vorbei, und man sieht fast auf den ersten Blick, dass er auch nicht durch den Punkt D' geht, der dort nicht gezeichnet ist, den man sich aber leicht hinzudenken kann, da er zum Punkt D in Bezug auf die Achse $A_1A_2A_3$ symmetrisch liegt.

Plücker irrt also auch hier; sein Irrthum ist aber allerdings eine nothwendige Consequenz des in seiner Analysis und Construktion der speciellen Aufgabe steckenden; er hätte hier Recht, wenn dort die Linien, welche durch B_1, B_2, B_3 gehen, und zugleich die Kreise μ_2 und μ_3, μ_1 und μ_3, μ_1 und μ_2 berühren, gerade Linien wären.

Dass sie das nicht sind, soll nun wenigstens für einen speciellen Fall erwiesen werden.

Fig. 5. Man nehme in der Figur 5 den Punkt o, den wir der Gleichförmigkeit wegen nunmehr D nennen wollen, zum Centrum eines beliebigen Hilfskreises. D ist Durchschnitt der (äusseren) Potenzkreise (oder Potenzlinien) DG, DH, DJ der Geraden GJ und GH, HG und HJ, JH und JG, also werden (6) im verwandten System den Geraden GH, JG, HJ drei gleiche Kreise M_1, M_2, M_3 entsprechen, die sämmtlich durch D gehen, und deren Tangenten in D beziehungsweise den Geraden GH, JG, HJ parallel sind (3). Den Potenzkreisen (Potenzlinien) DG, DH, DJ entsprechen die Potenzkreise der Kreise M_1, M_2, M_3 (5); da aber DG, DH, DJ sich selber entsprechen (3), so sind sie auch die Potenzkreise (Potenzlinien) der Kreise M_1, M_2, M_3; wovon man sich auch auf anderem Wege leicht überzeugt. Den Kreisen X, Y, Z entsprechen drei Kreise

μ_1, μ_2, μ_3, welche je die DG und DH, DJ und DG, DH und DJ, und zugleich die Kreise M_1, M_2, M_3 in den den Punkten P, U, W entsprechenden B_1, B_2, B_3 berühren (2); und zwar von Aussen; (denn für irgend einen Strahl durch D, welcher z. B. den Kreis X in x und y und die GH in z schneidet, ist, wenn x_1 und y_1 die entsprechenden Punkte des Kreises μ_1, z_1, der entsprechende Punkt des Kreises M_1 ist, $Dx \cdot Dx_1 = Dy \cdot Dy_1 = Dz \cdot Dz_1 = q^2$; aber Dz grösser als Dx und als Dy, also Dz_1 kleiner als Dx_1 und Dy_1, also die Punkte x_1 und y_1 des Kreises μ_1 ausserhalb des Kreises M_1). Den Geraden PO, UO, WO entsprechen Linien, welche durch B_1, B_2, B_3 gehen; aber da jene Geraden nicht durch D gehen, so sind auch diese Linien keine Geraden, sondern Kreise, die in diesem speciellen Falle allerdings durch D gehen und sich auch noch in einem zweiten Punkte schneiden werden, die aber nur dann in Gerade übergehen, wenn das Dreieck M_1 M_2 M_3 ein gleichseitiges ist. Sie werden sich freilich um so weniger von Geraden unterscheiden, je mehr dieses Dreieck einem gleichseitigen sich nähert, und deshalb ist auch oben für die Zeichenprobe die Anweisung gegeben worden, dieses Dreieck möglichst ungleichseitig zu nehmen.

Man sieht also, dass die oben angefochtene Behauptung Plückers in seiner Analyse für drei gleiche Kreise M jedenfalls in dem speciellen Fall falsch ist, wenn diese drei gleichen Kreise sich in einem Punkte schneiden; und man schliesst daraus mit höchster Wahrscheinlichkeit, dass die drei fraglichen Linien im allgemeinen Fall, wo die drei gleichen Kreise sich nicht in einem Punkte schneiden, nicht zu Geraden werden, wenn sie in dem speciellen, man ist versucht zu sagen, besonders günstigen Fall schon Kreise sind.

Es springt, nach allem Bisherigen, von selbst in die Augen, welche Construktion für den Fall dreier gleicher, in einem Punkt sich schneidender Kreise M an die Stelle der Plücker'schen su setzen ist; sowie dass die Plücker'sche Construktion für drei ungleiche Kreise brauchbar dann, aber höchst wahrscheinlich nur dann ist, wenn diese drei Kreise sich in einem Punkte schneiden.

Plücker hat gegen Steiner (a. a. O. Bd. XI, p. 126 Anm.) deutlich genug die Verdächtigung ausgesprochen, dass dieser für seine Construktion der Malfatti'schen Aufgabe keinen Beweis zu führen vermocht habe, und dass der von Steiner behauptete Zusammenhang seiner Construktionen mit den vorausgeschickten Sätzen ein fingirter sei. Plückers eigene Analyse und Construktion der Steiner'schen Verallgemeinerung des Malfatti'schen Problems ist nach dem Bisherigen im besten Falle unerwiesen, im höchst wahrscheinlichen schlimmeren Falle unrichtig, und fordert überdies, in Betreff der fatalen „etwas ermüdenden Eliminationsrechnung", zu eigenthümlichen Vermuthungen heraus. Er hat das Verdienst, gezeigt zu haben, wie die Aufgabe für drei ungleiche Kreise auf eine andere für drei gleiche Kreise reducirt werden kann; im Uebrigen aber dürfte diese seine Leistung wohl nur den Werth eines interessanten Belegs dafür haben, dass die Leidenschaft auch bedeutende Männer und grosse Mathematiker irre führen kann. Dass diese psychologische Erklärung die richtige ist, wird einem aufmerksamen Leser der „Aphorismen" kaum entgehen; und man wird es dem

Verfasser dieses Aufsatzes nicht verdenken, die Sache an's Licht gezogen zu haben, wenn man erwägt, wie viel vergebliche Mühe schwächeren Kräften, zu denen der Verfasser sich rechnen muss, aus einem solchen Verfahren einer Autorität ersten Ranges erwächst.

Eine Vermuthung darüber auszusprechen, wie Steiner zu seinen Construktionen gekommen sei, unterlässt der Verfasser, wie billig, um so mehr, als er gar nicht weiss, ob nicht Steiner selbst später über diesen Gegenstand etwas veröffentlicht, oder ob sich nicht in seinem Nachlass etwas darüber gefunden hat.

Zur Sache selbst hat der Verfasser nicht mehr viel beizubringen. Man kann versuchen, dem Problem, das jedenfalls unter den durch Kreis und gerade Linie lösbaren zu den schwierigsten gehört, gleichsam von unten beizukommen, indem man an die Stelle der drei Kreise Punkte (die dann natürlich die Berührungspunkte der gesuchten Kreise werden müssen) und gerade Linien setzt; wodurch man im Ganzen zehn Probleme erhält, die denjenigen analog sind, in welche das Tactionsproblem des Apollonius zerfällt. Man wird hier sofort die Lösung finden, wenn drei Punkte gegeben sind; man wird auch, wenn zwei Punkte und eine Gerade, oder zwei Punkte und ein Kreis gegeben sind, bald zu Lösungen gelangen (auf die einzugehen der Verfasser unterlässt); man wird aber für alle übrigen Fälle auf erhebliche Schwierigkeiten stossen.

Darf man in solchen Dingen eine Vermuthung äussern, so wäre es die, dass vielleicht noch eine andere „Kreisverwandtschaft“ existirt, in welcher den geraden Linien Kreise entsprechen, die nicht alle durch einen Punkt gehen. Eine solche „Kreisverwandtschaft“ (die vielleicht schon entdeckt ist), wird, wie Plücker (Crelle X Aphorismen II) wahrscheinlich gemacht hat, durch eine Reihe analoger Sätze über Gerade und Kreise gefordert.

Auch Folgendes mag noch bemerkt werden: Wendet man auf den Fall, dass statt der drei Kreise drei Punkte gegeben sind, die Steiner'sche Methode an, so kommt man zu einer Construktion, die weit complicirter ist, als die einfache, die Jeder sogleich findet. Es steht daher zu vermuthen, dass neben der Steiner'schen Construktion der allgemeinen Aufgabe noch andere und vielleicht einfachere gefunden werden können; dass überhaupt gerade diese verallgemeinerte Malfatti'sche Aufgabe dem dazu befähigten Forscher noch ein weites Feld höchst fruchtbarer Entdeckungen bietet.

Nachrichten über das Seminar Schönthal.

Zunächst haben diese Nachrichten bloss die Aufgabe, von dem Bestand und den Veränderungen unserer Anstalt im abgelaufenen Cursus 1864—1868 Kunde zu geben. Sofern sie aber zugleich eine Fortsetzung früherer Berichte sind und in Verbindung mit diesen der Kenntniss theils der bisherigen Geschichte unseres Seminars theils der Einrichtungen unserer württembergischen niederen Seminarien überhaupt dienen sollen (laut Erlass 14./23. Febr. 1857); ist es am Platze, in Kürze die wichtigsten Schriftstücke der letzten Jahrzehnte namhaft zu machen, welche diesem gedoppelten Bedürfniss entgegenzukommen suchen. Ausser unsern sechs Programmen, namentlich dem ersten vom Jahr 1844 von Ephorus Dr. Roth und dem fünften von Ephorus Dr. Elwert 1860, sind zu nennen: „Die ehemaligen Klosterschulen und die jetzigen niederen evangel. Seminarien" von Ephorus Wunderlich und Prof. Hauff und Klaiber 1833; „Schwaben wie es war und ist" 1842, S. 106 ff.; Sammlung württembergischer Schulgesetze von Hirzel, 2. Abth., S. XXVI ff.; „Schilderung des Klosters und Seminars Maulbronn" von Ephorus Bäumlein, Programm 1859; auch „Die sog. niederen Seminarien in Württemberg" in den Protestantischen Monatsblättern von Gelzer, Juli 1862, von Prof. Mezger. Diesen älteren Mittheilungen möge sich nun dieser unser Bericht anschliessen.

Gleich im Anfang des Curses erlitt die Anstalt einen schmerzlichen Verlust. Ephorus Eduard v. Elwert, Doctor der Philosophie und Theologie, Ritter des Württ. Friedrichs- und Kronordens, musste wegen tief angegriffener Gesundheit, noch vor Eintritt der neuen Promotion, am 1. September 1864 um Urlaub, und später um Enthebung von seinem Amte bitten. Diese wurde ihm unter ehrendster Anerkennung der treu geleisteten Dienste am 23. Mai 1865 verwilligt. Doch schon wenige Wochen nach seiner Pensionirung ereilte ihn am 9. Juni in erschütternd rascher Weise der Tod in seiner Vaterstadt Canstatt, wohin er von hier aus mit seiner Gattin und Einer seiner beiden Töchter eben erst gezogen war. Die Bedeutung, welche der Verewigte nicht bloss während seiner fünfzehnjährigen Leitung unserer Anstalt für diesen engeren Kreis, sondern durch seine wissenschaftlichen Leistungen für die württembergische und deutsche Theologie gewonnen hat, macht es uns zur Pflicht, seinem Namen hier wenigstens eine etwas eingehendere Berichterstattung, ein ehrendes und dankbares Andenken zu stiften. Einem solchen Sohne ist das Vaterland einen Nekrolog schuldig und dieser Anstaltsbericht ist wohl der geeignetste Ort dafür.

Eduard Elwert, 22. Febr. 1805 zu Canstatt geboren, wo sein Vater, der vormalige Hofmedicus, den ärztlichen Beruf ausübte, wurde in der Schule seiner Geburtsstadt,

im Seminar zu Maulbronn und als Zögling des evangel. Stifts zu Tübingen für die Aemter vorbereitet, die er der Reihe nach in Kirche und Schule bekleidet hat. Nach dem Abgang von der Hochschule, wo er in der Theologie die Doctoren Bengel, Steudel, Kern, Baur und Schmid zu Lehrern gehabt hatte, war er zuerst ein Jahr lang Repetent an dem hiesigen Seminar und trat dann 1829 eine grössere Reise an, bei der sein Zweck hauptsächlich auf die Bekanntschaft der vorzüglichsten Universitäten, Gottesgelehrten und Prediger in Deutschland gerichtet war. Am längsten verweilte er in Berlin und trat dort in nähere Verbindung mit Neander und Schleiermacher.

Die Jahre 1830—32 brachte er als Repetent am Seminar zu Tübingen zu. In dieser Eigenschaft bekundete er bereits durch Vorlesungen „über die Geschichte des protestantischen Lehrbegriffs", durch Recensionen in Zimmermann's Litteraturblatt, z. B. über Nitzsch's System etc. (noch vom J. 1829), und durch zwei gehaltvolle Abhandlungen: „Versuch einer Deduction der göttlichen Eigenschaften" in der Tübinger Zeitschrift f. Theol. 1830, 4. H., und: „über die Lehre von der Inspiration in Bezug auf das N. T." in den Studien der württemb. Geistlichkeit 1831, in hervorragender Weise seinen Beruf zu akademischer Lehrthätigkeit.

Eine solche ward ihm auch nach wenigen Jahren zugewiesen, indem er nach vierjährigem pfarramtlichen Wirken, als Diaconus zu Nagold 1832—36, ohne sein Zuthun als Professor der Theologie an die Hochschule in Zürich berufen wurde. Er hatte dies ausser den schon genannten Arbeiten mehreren weiteren Aufsätzen zu danken, die er in dieser Zeit theils unter seinem Namen, theils anonym als fleissiger Mitarbeiter des Rheinwald'schen Repertoriums herausgab. Sie sind: „Ueber das Wesen der Religion mit Rücksicht auf Schleiermacher", Tübinger Zeitschr. 1835, 3. H. „Bemerkungen über das Verhältniss, in welchem die Stellen Luc. 11, 23 und 9, 30 zu einander stehen", Stud. d. Württ. Geistl. 1836; eine Recension „über die Tübinger Zeitschrift", in welcher auf die frühere Geschichte der Theologie in Tübingen, namentlich auf Storr, zurückgegangen ist, (Rheinwald Rep. 1833, 2. Bd.); eine Recension über die Glaubenslehre von Steudel (ibid. 1835, 10. Bd.); über die Schrift: „Sache der neuen preussischen Agende und Union, Stuttgart 1835", (ibid. 1836, 12. Bd.); endlich viele Anzeigen anderer, auch schönwissenschaftlicher Werke, besonders des sog. jungen Deutschlands, in derselben Zeitschrift. Auch für das Sonntagsblatt „Theophilus" lieferte er damals schätzbare Beiträge.

Die Antrittsrede in Zürich handelte *de nexu, quo theologia dogmatica et historica inter se conjungantur*, die Dissertation: *de Antinomia Jo. Agricolae*, Turici 1836. In den Vorlesungen behandelte er vornehmlich die Kirchen- und Dogmengeschichte. Ueber diese Züricher Zeit findet sich in einer Aufzeichnung von seiner eigenen Hand eine für sein äusseres Leben wie sein inneres Wesen besonders bezeichnende Stelle. „Gerne gestehe ich es, dass das neue Amt, in welches ich in Zürich eintreten sollte, einen besonderen Reiz für mich hatte; denn so sehr ich bis dahin mich in dem Berufe eines Predigers befriedigt gefunden hatte, so schön dachte ich mir diesen anderen Beruf, dessen Zweck und Aufgabe war, studirende Jünglinge zum Predigerstande heranzubilden, und mit voller Aufrichtigkeit darf ich es bezeugen, dass ich in dieser Ansicht und Erwar-

tung mich nicht getäuscht habe. Aber bei all dem Schönen und Erfreulichen, das mir in meiner dortigen Lage durch die vertrauensvolle Zuneigung der Studirenden sowie durch das freundliche Wohlwollen trefflicher Collegen zu Theil geworden ist, war doch die Zeit, die ich in jenen Verhältnissen durchlebte, zugleich von mancher für mich schweren Erfahrung begleitet. Ein halbes Jahr etwa nach meiner Ankunft in Zürich begann ich die Folgen der ungewöhnlichen Anstrengung zu fühlen, welche der neue Beruf mit sich brachte, und von da fand ich mich in der Ausübung meiner Berufspflichten auf's Mannigfaltigste gehemmt durch den angegriffenen Zustand meiner Gesundheit, insbesondere durch anhaltende Kopfleiden, welche mir die geistige Arbeit erschwerten. Oft hielt ich es für unmöglich, in diesem Zustand meine Obliegenheiten zu erfüllen, aber dem Herrn sei es gedankt, dass er auch unter diesen schweren Erfahrungen mir immer treu und gnädig durchgeholfen und mir Kraft gegeben hat auch da, wo ich mich schwach und verzagt fühlen musste."

Doch auch äusserlich sollte geholfen werden. Schon im Herbst 1837 erging vom Vaterland aus ebenso unerwartet als ehrend der Ruf an ihn, die Stelle des eben gestorbenen Dr. Steudel in der theologischen Fakultät in Tübingen einzunehmen. Die Rücksicht auf seine damals gerade sehr geschwächte Gesundheit verbot ihm zwar, dem Rufe zu folgen; es wurde ihm aber, wohl in der Absicht, ihn dennoch früher oder später für den Lehrstuhl der Universität zu gewinnen, ohne sein Gesuch eine Anstellung im kirchlichen Dienst des Heimathlandes angeboten. Er erhielt die Pfarrstelle in Mötzingen, Diöc. Herrenberg, 1838. Im Jahre darauf wurde er zum Mitglied der hist. theol. Gesellschaft zu Leipzig ernannt.

Wiederholtem Andringen der Staatsregierung folgend übernahm er dann wirklich, wiewohl seiner Kränklichkeit wegen mit schwerem Herzen, im Jahre 1839 den nun auf's Neue an ihn ergangenen Lehrauftrag an der vaterländischen Hochschule, musste aber, durch fortwährendes Kopfleiden genöthigt, bald wieder dem akademischen Wirken entsagen und im Jahre 1841 auf die ihm vorbehaltene Pfarrei Mötzingen zurückkehren.

Daher war es für ihn, so treu und hingebend er auch diesem kirchlichen Amte und, da seine Kraft wieder erstarkt war, als Mitglied der ausserordentlichen Synode für Verbesserung des württemb. Gesangbuchs und Kirchenbuchs 1841, auch unserer Kirche im Grossen seine Dienste widmete, eine erwünschte Gelegenheit, seine Lehrthätigkeit wieder anzuknüpfen, als ihm im Jahre 1850 das Ephorat am hiesigen Seminar übertragen wurde. Er war hier der Amtsnachfolger von Roth, der nun auch heimgegangen ist (6./7. Juli 1868). In dieser Stellung war es ihm vergönnt, noch während einer Reihe von Jahren seine reiche Begabung und sein umfassendes Wissen in Theologie und Philologie zu verwerthen. Er that dies nicht allein im Religionsunterricht und in den neutestamentlichen Lehrstunden, sondern auch in mehreren gehaltvollen Abhandlungen. Diese sind theils aus den Studien hervorgegangen, die er in umfassender Weise zum Behuf seines Unterrichts im N. T. machte, und niedergelegt in den zwei Programmen: *Annotationes in locum Gal. 2, 1—10* v. J. 1852, und *Quaestiones et observationes ad philologiam sacram N. T. pertinentes* vom J. 1860, theils stehen sie im Zusammenhang mit

seinem pädagogischen Wirken und seinen eingehenden philologischen Forschungen: „Ueber die Mittel, die Selbstthätigkeit der Schüler zu fördern", Württemb. Correspondenzblatt 1855, Nr. 11. und die „Bemerkungen über Orthoepie in Bezug auf das Lateinische", ibid. 1856, Nr. 8. 9. 10.

Die Gründlichkeit seiner überall auf selbständigem Forschen beruhenden Kenntnisse, verbunden mit dem gewissenhaftesten Wahrheitssinn auch in wissenschaftlichen Dingen und der treuesten Hingabe an die Aufgaben seines Lehrerberufs, konnten nicht verfehlen, empfängliche Schüler in höherem Grade für ein wissenschaftliches Leben anzuregen und vorzubilden, sie besonders mit einer schätzbaren Mitgabe tieferen und sicheren Wissens für ihre theologischen Studien auszustatten. Wiewohl er seiner geistigen Natur nach vorzugsweise für akademische Wirksamkeit bestimmt war, sofern er sich mehr in die Objecte der Wissenschaft als in die lernenden Subjecte vertiefte, konnte dennoch, bei der Klarheit und Bestimmtheit seines Wissens, auch der minder begabte Schüler aus seiner Unterweisung reichen Gewinn ziehen. Wirkte so schon sein Unterricht, dem ausserdem noch eine an den besten Mustern alter und neuer Zeit genährte geschmackvolle Darstellung in ungewöhnlichem Masse zu Gebot stand, immer zugleich sittlich hebend und veredelnd; so geschah dies noch unmittelbarer durch die ganze Persönlichkeit seiner auch sittlich tief angelegten Natur. Denn was von seiner wissenschaftlichen, insbesondere seiner theologischen Begabung und Richtung zu sagen ist, dass er weit auseinander liegende Gegensätze, die Ansprüche sowohl des scharfblickenden Verstandes als des frommen Gemüths, und Studien ganz verschiedener Art zu umspannen und in Einklang zu bringen wusste, gilt auch von seinem sittlichen Wesen. Suchen wir auch nach dieser Seite hin in aller Kürze einen Abriss seines geistigen Seins zu geben. Pietät in den verschiedensten Beziehungen und darum die zarteste Scheu, fremde Interessen und Gefühle zu verletzen, aber auch eine feine Fühlsamkeit, wo er dieselbe bei Andern vermisste; tiefe Demuth vor Gott und Menschen und rücksichtsvollste Humanität, verbunden mit berechtigtem Selbstgefühl und einem Anflug aristokratischer Zurückhaltung; ängstliche Gewissenhaftigkeit, Treue, und Pünktlichkeit in Allem, was er als zum Kreis seiner Pflicht gehörig ansah, neben ausgeprägter Anlage zu edler Geselligkeit und schalkhaftem Humor, mit Fernhalten aller Pedanterie; väterliche Liebe und Fürsorge für leibliches und geistiges Wohl der Zöglinge und Untergebenen bei aller Kraft und Entschiedenheit gegenüber jeglicher unwahren oder niedrigen Gesinnung; strenge Gerechtigkeit und Unparteilichkeit neben weitherziger Billigkeit in Beurtheilung fremder Schwächen — dies dürften die wesentlichen Züge im geistigen Bilde des Mannes sein, den wir als unsern, mit ungetheilter, wenn auch nicht immer ungeschwächter Kraft und Lebendigkeit wirkenden Vorstand fünfzehn Jahre lang besitzen durften.

Es bedarf keiner weiteren Worte, um im Einzelnen darzulegen, welchen wissenschaftlichen, sittlich veredelnden und religiös erhebenden Gewinn eine solche Persönlichkeit der ganzen Seminargemeinde, den Mitarbeitern im Amte, den Zöglingen und Untergebenen der Anstalt gebracht hat. Die Königl. Regierung hat seine Bedeutung und sein Wirken gewürdigt durch Verleihung zweier Orden, bei uns aber, bei einer

grossen Zahl von Berufs- und Amtsgenossen und bei einer noch grösseren von Schülern, lebt er in gesegnetem, dankbarem Andenken fort.

Doch auch ausserdem haben wir aus diesem Zeitraum ungewöhnlich viele Veränderungen in unserem Lehrerpersonal zu verzeichnen.

An die Stelle des Ephorus v. Elwert trat, zunächst als Amtsverweser vom 1. Sept. 1864 an, dann durch höchste Entschliessung vom 20. Juli 1865 als Ephorus der seitherige erste Professor Dr. Eduard Eyth. Auf die dadurch erledigte erste Professur rückte Professor Mezger vor, die zweite erhielt durch königliche Entschliessung vom 10. Sept. 1865 der Rector des Lyceums in Oehringen, Dr. Karl Fuchs. Diesem wurde sodann am 20. Nov. 1866 seinem Ansuchen gemäss die erledigte Professur am Seminar in Urach gnädigst übertragen und an seine hiesige Stelle der Professor Dr. Pauli an der philosophischen Fakultät der Universität Tübingen versetzt. Prof. Pauli hat hierauf um seine Entlassung aus dem württembergischen Staatsdienste gebeten und es wurde ihm unter dem 22. Nov. von Sr. Majestät die nachgesuchte Dienstentlassung ertheilt. In Folge dessen wurde am 15. Dec. 1866 zum Professoratsverweser ernannt der frühere Repetent unserer Anstalt, Gustav Binder, der seit 11. November 1865 als Gymnasialvikar in Stuttgart angestellt war. Er trat am 3. Januar 1867 sein neues hiesiges Amt an. Dem auf sein Ansuchen auf das Ephorat Blaubeuren gnädigst versetzten Dr. Eyth folgte durch höchste Entschliessung vom 10. März l. J. im hiesigen Ephorat der seitherige Professor Karl Ludwig Friedrich Mezger. Die erledigte Stelle wurde durch Entschliessung Sr. Kgl. Majestät vom 7. April l. J. dem Professor Karl Kraut am Gymnasium zu Tübingen übertragen. Derselbe war vom Jahr 1851 bis 1857 Repetent an unserem Seminar und von 1857 bis 1862 Professor und Rector der Cantonsschule in Frauenfeld gewesen.

Nach dem Abgang des Repetenten G. Binder trat vermöge Erlasses vom 15. Nov. 1865 Vikar Albert Herrlinger in Bonfeld als Repetent am Seminar ein, ebenso an die Stelle des als Professor an das Gymnasium in Schaffhausen berufenen Repetenten Rümelin der Lehramtscandidat Dr. Theodor Weidlich, bis dahin Amtverweser am Lyceum in Oehringen, (laut Erl. v. 2. Juni 1866), statt des zum Repetenten am Stift zu Tübingen ernannten A. Herrlinger aber wurde vermöge Erlasses v. 27. April 1867 der Pfarrgehilfe in Ostdorf Karl Jäger zum Repetenten hieher berufen. Der Personalstand der Seminarlehrer ist demnach gegenwärtig folgender:

Ephorus: Karl Ludwig Friedrich Mezger, Professor: Karl Kraut, Professoratsverweser: Gustav Binder, Repetenten: Dr. Theodor Weidlich und Karl Jäger.

Musiklehrer ist G. Omeis, zugleich Lehrer der hiesigen evangel. Volksschule.

Im Herbst 1864 wurden in das Seminar folgende Zöglinge aufgenommen:

1) 35 Seminaristen.

Wilhelm Ammon von Obergröningen, Reinhold Belser von Backnang, Paul Bilfinger von Sulzbach, Friedrich Braun von Welzheim, Theodor Dierlamm von Ottmarsheim, Paul Eberhardt von Tübingen, Christian Ehemann von Freetown in

Sierra Leone, Karl Ehrhart von Ulm, Albert Engelbrecht von Sindringen, Ernst Erhardt von Riedlingen, Hermann Fink von Geislingen, Hermann Fischer von Oehringen, Victor Gräter von Hall, Christian Härtter von Altenmünster, Theodor Hermann von Liebenzell, Karl Hilbert von Stuttgart, Hugo Hochstetter von Botenheim, Friedrich Kilian von Weikersheim, Gotthold Knapp von Neckarthailfingen, Richard Kuhn von Plieningen, Paul Lechler von Kornwestheim, Friedrich Mezger von Schönthal, Gustav Müller von Biberach, Robert Oberreutter von Stuttgart, Theodor Oehler von Tübingen, Ludwig Palm von Maulbronn, Gustav Pezold von Rottenburg, Friedrich Riecker von Backnang, Friedrich Schuldt von Calw, Heinrich Seybold von Einweiler, Eugen Stockmayer von Stuttgart, Heinrich Veil von Heidenheim, Adolf Weiss von Welzheim, Paul Weizsäcker von Adelberg, Hermann Weigle von Ludwigsburg.

2) 5 Seminarhospites.

Gustav Barth von Magstadt, Karl Baur von Böblingen, August Epple von Böblingen, Karl Wächter von Leonberg, Richard v. Wider von Schönthal.

3) 4 Privathospites.

Emil Heldbeck von Weilheim u./T., Martin Krais von Oberurbach, Nathanael Kretschmer von Aldingen, Richard Wolff von Esslingen.

Von diesen 44 Zöglingen blieb Seminarist Braun im Gymnasium zu Stuttgart, Seminarhospes Epple verzichtete auf die Aufnahme, an seine Stelle trat Privathospes Kretschmer als Seminarhospes, und statt dessen noch Otto Braun von Plochingen als Privathospes ein. Privathospes Wolff trat am 29. Sept. 1865 aus, Seminarhospes Wächter ging im Frühjahr 1866 in das Gymnasium zu Stuttgart über, der Sem. Gräter wurde am 14. Juni dess. J. entlassen, Sem. Oehler trat am 29. Dec. 1866 in's Gymnasium zu Tübingen über, Sem. Riecker kam am 31. Dec. 1866 durch einen Unglücksfall in der Christvakanz um's Leben. In Folge der entstandenen Lücken wurden nach und nach sämmtliche Privathospites in die Reihe der Seminarhospites aufgenommen, Seminarhospes Baur wurde am 26. Januar 1867 Seminarist; auch trat Emil Seybold aus dem Gymnasium in Heilbronn im Herbst 1867 noch als Seminarhospes ein.

4) Ausserdem erhielten im Herbst 1864 die Erlaubniss, die Unterrichtsstunden als Auscultanten besuchen zu dürfen: W. E. Eyth von Schönthal, E. Mezger von Schönthal und der seitherige Lehrgehilfe Leopold von Trichtingen. Die zwei Ersten gingen zu andern Berufsarten über, Leopold aber bezog nach einer mit gutem Erfolg erstandenen Maturitätsprüfung schon im Frühjahr 1867 die Universität.

Somit beabsichtigen 38 Zöglinge unserer Anstalt, 32 Seminaristen und 6 Hospites, am 1. Sept. und den folgenden Tagen die Prüfung für die Aufnahme in das höhere evangel. Seminar zu Tübingen und für die Ermächtigung zum Studium der evangel. Theologie, 1 Hospes aber, R. v. Wider, die Maturitätsprüfung am 15. Sept. und den folgenden Tagen für Ermächtigung zum Studium der Jurisprudenz zu erstehen.

Der Gang des Unterrichts in dem vierjährigen Curs möge aus nachstehender Uebersicht erhellen.

A. Sprachunterricht.

I. Latein.

1. Exposition, 6 Stunden wöchentlich, 4 St. für den Prosaiker, 2 St. für den Dichter, von welch letzteren jedoch alle 14 Tage eine Stunde für die lateinische Periode verwendet wird.

a. Prosaische Lektüre: Livius, Praefatio, Lib. II, 1—63. III, 1—21; Sallust, Catilina; von Cicero vier Catilinarische Reden, ferner *pro Archia, de imperio Cn. Pomp.*, ausgewählte Briefe, Orator §. 1—159; von Tacitus Annal. I. vollst. II, 1—41. Agricola, Germania (Mezger, Kraut).

Je alle 14 Tage wurde zu schriftlicher Uebersetzung eine sog. lat. Periode aufgegeben, vorherrschend aus Livius, Sallust Jug. und Fragm., Cicero Philosoph. und Rhetor., Plinius und Tacitus (Binder, Rümelin, Herrlinger, Jäger, Kraut).

b. Poetische Lektüre: Ovid's Metamorphosen im Auszug von Feldbausch, Virgil's Aeneis, Erstes Buch vollständig, ferner das Meiste aus 2. 4. u. 6. Buch, Horat. Od. I, 1—7. 9—11. 13—20. 22—24. 26—35. 37. 38. II, 3. 8. 13. 14. 17. 20. III, 1—6. 8. 9. 21. 29. 30. Sat. I, 1. 3. 4. 6. 7. 9. II, 2. 6. Epist. 1—7 (Eyth, Herrlinger, Jäger, Kraut).

In einer ausserordentlichen Lehrstunde, an der sich aber alle Schüler betheiligten, wurde im zweiten Semester Terent. Andria gelesen (Mezger).

2. Composition, zwei Stunden wöchentlich.

a) Hebdomadar 1 St. In den zwei letzten Semestern wurde auch je Ein lateinischer Aufsatz gefertigt (Mezger, Binder, Kraut).

b) Mündliche Composition, 1 Stunde, in den ersten fünf Semestern nach Mezger's, in den letzten drei nach Nägelsbach's lat. Stilübungen (Mezger, Herrlinger, Weidlich, Kraut).

II. Griechisch.

1. Exposition, 5 Stunden wöchentlich. Mit prosaischer und poetischer Lektüre wurde im gleichen Semester abgewechselt.

a) Prosaische Lektüre: Jakobs Attica; Herodot I—V. Buch; Demosthenes Olynth. Reden 1. 2. 3., *de pace*, zweite philippische, *de Chersoneso*, dritte philippische; von Platon: Apologie, Criton, Phädon (Eyth, Fuchs, Binder).

b) Poetische: Homer's Odyssee ganz, von der Ilias I—XI.; von Sophokles: Antigone, Oedipus rex, Oedipus Kolon (Eyth, Weidlich).

2. Composition, 1 Stunde wöchentlich, alle 14 Tage Hebdomadar, in den letzten Semestern griechische Diktate zum Uebersetzen in's Deutsche (Eyth, Binder, Weidlich).

II. Hebräisch.

1. Exposition: im ersten Semester 5, vom zweiten an regelmässig 3 Stunden

wöchentlich; Elementarunterricht nach dem Uebungsbuch von Mezger. Josua 1—5; Genesis mit einzelnen Auslassungen; Buch der Richter 1—12; Ruth; 1 Sam. 1—3. 15—31. 2 Sam. I. 5—7. 12, 1—23. 15—19. 23, 1—7. 2 Kön. 23—25. Psalmen 1—28 und andere cursorisch, ebenso Einiges aus den Proverbien; von den Propheten: Amos, Micha, Jeremia 1—10. 26. 30—33; Haggai (Mezger).

2. Composition, 1 Stunde wöchentlich; mündliche Uebersetzungen und grammatische Uebungen; alle 14 Tage ein schriftliches Hebdomadar, in den letzten vier Semestern mit Diktaten abwechselnd (Mezger).

IV. Französisch.

Im ersten Semester 1 Stunde wöchentlich für diejenigen, welche schon einen Grund in der Sprache gelegt hatten, im zweiten Semester mit allen Schülern 3 Stunden in der Woche, von da an immer 2 Stunden. Gelesen wurde in der Chrestomathie von Gruner und Wildermuth II. Curs 2. Abth. Geschichte 1—5. 7—10. 31, 1—4. 92, 1. *Le verre d'eau* par E. Scribe, *L'avare* par P. Molière. Schriftliche Compositionen wurden, im Anschluss an die Grammatik von Knebel, alle 14 Tage vom 2—7. Semester gefertigt (Binder, Rümelin, Weidlich).

V. Deutsch.

Der Unterricht im Deutschen, in zwei wöchentlichen Lehrstunden 1—6. Semester, in Einer Lehrstunde 7. und 8. Semester, bestand im ersten Halbjahr in Erklärung neuerer Gedichte von Göthe, Schiller, Uhland; im 2—4. Semester wurde die mittelhochdeutsche Formenlehre und Litteraturgeschichte bis zur Reformation, im 5. und 6. Semester die Litteraturgeschichte der neueren Zeit behandelt. Im 7. und 8. Semester wurde die Eine Lehrstunde auf die deutschen Aufsätze und Declamation (s. unten) verwendet. Deutsche Aufsätze waren zu fertigen in jedem Semester regelmässig drei grössere und zwei kleinere (Rümelin, Binder, Herrlinger, Jäger).

B. Wissenschaften und Realien.

I. Religion.

1. Religionslehre. In 2 Stunden wöchentlich wurde, im Anschluss an den Leitfaden zum christl. Religionsunterricht von Hagenbach, alttestamentliche und neutestamentliche Religionsgeschichte nebst Einleitung und Lektüre des A. u. N. T. bis Mitte des sechsten Halbjahrs, von da an eine Uebersicht der Kirchengeschichte bis zur Reformation, und die Glaubens- und Sittenlehre abgehandelt (Rümelin, Fuchs, Mezger).

2. Lesen des Neuen Testaments im Grundtext in zwei wöchentlichen Stunden, Evangel. Lucä, Matth., Apostelgeschichte, Brief Jacobi, 1 und 2 an Timoth., an Titus, Philemon, 1 und 2 Petr., Ev. Johannis, an die Römer, 1 Korinth. (Rümelin, Eyth, Kraut).

II. Geschichte in 2 wöchentlichen Stunden, nach dem Dittmarschen Lehrbuch, alte, mittlere und neue Geschichte bis 1815. Im letzten Halbjahr repetitorischer Ueberblick (Eyth, Fuchs, Binder).

III. Mathematik, Arithmetik und Geometrie abwechselnd, in 3 wöchentl. Stunden.

1. Arithmetik: Decimalbrüche, Buchstabenrechnung, Gleichungen ersten Grades, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Gleichungen zweiten Grades, arithmetische und geometrische Progressionen; im achten Semester Repetition.

2. Geometrie: Lehre von den Winkeln, Congruenz der Dreiecke, Flächeninhalt der Figuren, Kreislehre, Aehnlichkeit der Figuren, Kreistheilung und Kreismessung, im achten Semester Repetitionen.

Zu den Aufgaben wurden benützt: die Materialien von Nagel, die Sammlung von Heis. Vom dritten Semester an wurde mit einer Selecta zuerst die Planimetrie schneller absolvirt, dann aber Stereometrie und Trigonometrie gelehrt, neben fortgesetzten planimetrischen Uebungen (Binder, Fuchs, Binder).

IV. Geographie; beschreibende, im 1. und 2. Semester in zwei, im 3. und 4. Semester in Einer Wochenstunde (Binder, Herrlinger, Weidlich); mathematische im 5. Semester in zwei Wochenstunden (Weidlich).

V. Naturlehre; Physik und Chemie im 6.—8. Semester (Binder).

VI. Psychologische Einleitung zur Logik und Logik in zwei wöchentlichen Stunden im 7. und 8. Halbjahr, letztere nach dem Lehrbuch von Hoffmann (Jäger).

C. Fertigkeiten.

I. Declamation und Redeübungen wurden in jeder Woche Ein Mal gehalten in einer der zwei für den deutschen Unterricht bestimmten Stunden (Rümelin, Binder, Herrlinger, Jäger).

II. Tonkunst.

1. Gesang: Theoretischer Unterricht nach der Elementar-Singschule von Lebert und Stark; Einübung von 80 Kernmelodieen aus dem Württemb. Choralbuch; Chorgesänge von Marcello, Mozart, Beethoven, Haydn, Weber, Kreutzer; Turn- und Volkslieder.

2. Instrumentalmusik: theoretischer Unterricht nach den Schulen von Spohr, David und Fröhlich; Streichquartette von J. Haydn, Orchesterwerke von Mozart, Beethoven, Haydn und Zumsteeg; Clavierunterricht nach Zweigle's, Lebert's und Stark's Schulen, und Haydn's, Mozart's und Beethoven's Sonaten. Concerte wurden acht gehalten (Musiklehrer Omeis).

In Betreff der Behandlung des Unterrichts dürfte es genügen, theils auf die Eingangs genannten grösseren Schriftstücke über die Seminarien im Allgemeinen, theils auf die Bemerkung am Schluss des Schönthaler Programms 1856 zurückzuweisen, wo eine uns bewährte und auch in diesem Curs fortgesetzte Art der Selbstbeschäftigung der Schüler geschildert ist.

Am Ende des Jahres 1866 trat eine für Professoren und Repetenten unseres Seminars nicht unerhebliche Aenderung ein. Während deren Theilnahme am hiesigen Predigtamt früher eine amtliche Obliegenheit war und auch seit Anstellung eines

Pfarrverwesers 1845 theilweise noch freiwillig übernommen und fortgeführt wurde, hat sie seitdem aufgehört, eine regelmässige zu sein, und findet nur noch in Ausnahmsfällen statt.

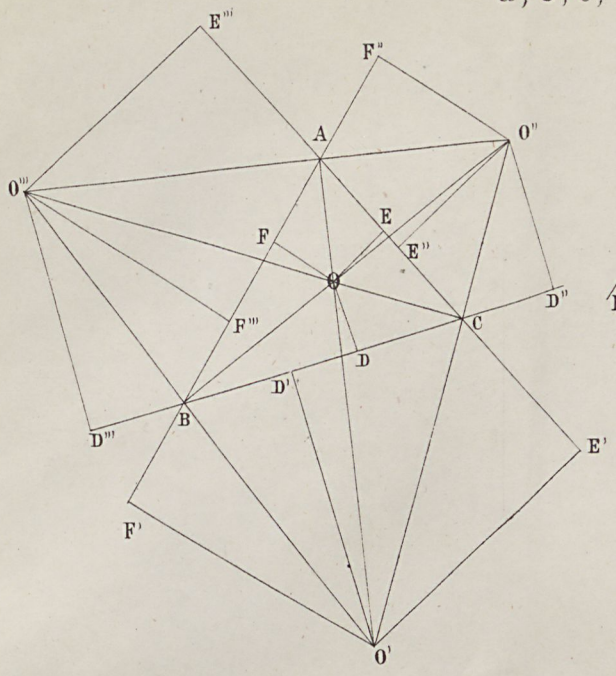
Die regelmässig wiederkehrende Visitation des Seminars wurde am 23. ff. Juli 1867 durch eine Commission der Oberbehörde vorgenommen.

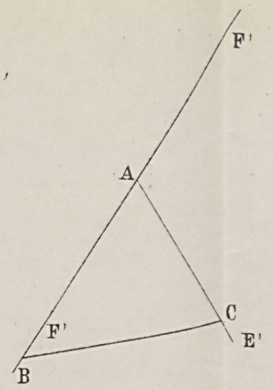
Dass durch hohes Rescript vom 14. d. J. im letzten Semester den Zöglingen gestattet wurde, an Sonn- und Feiertag Nachmittagen in Partieen von 5—8 an der Zahl Ausflüge in der Umgegend ohne Aufsicht zu machen, ist gleichfalls eine erwähnenswerthe Neuerung der Seminardisciplin, deren Zweckmässigkeit sich im Ganzen wohl erprobt hat.

Im Mai vorigen Jahrs wurde auch unserer Anstalt die hohe Ehre zu Theil, eines huldvollen Besuchs Sr. Königl. Majestät gewürdigt zu werden.

Fig. 1.

a, *b*, *c*,





A

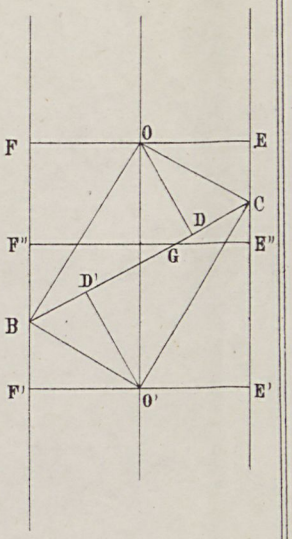


Fig. 2.

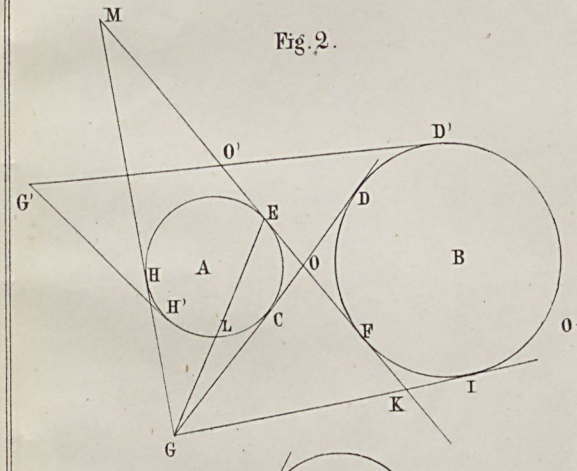


Fig. 3.

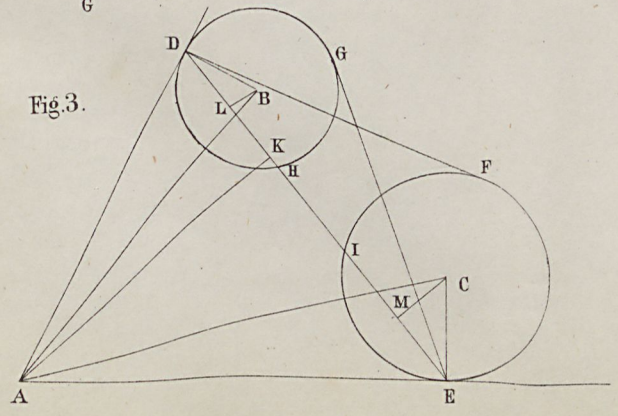
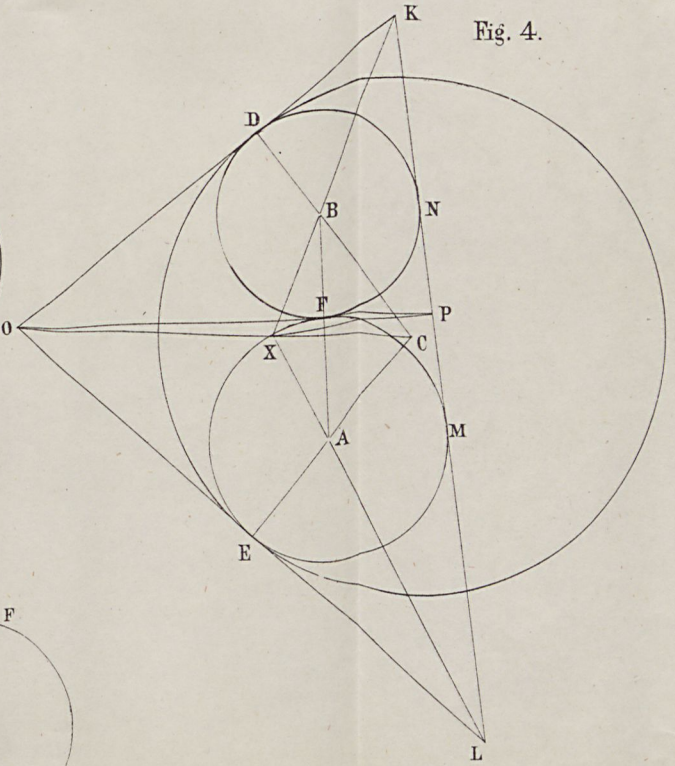


Fig. 4.



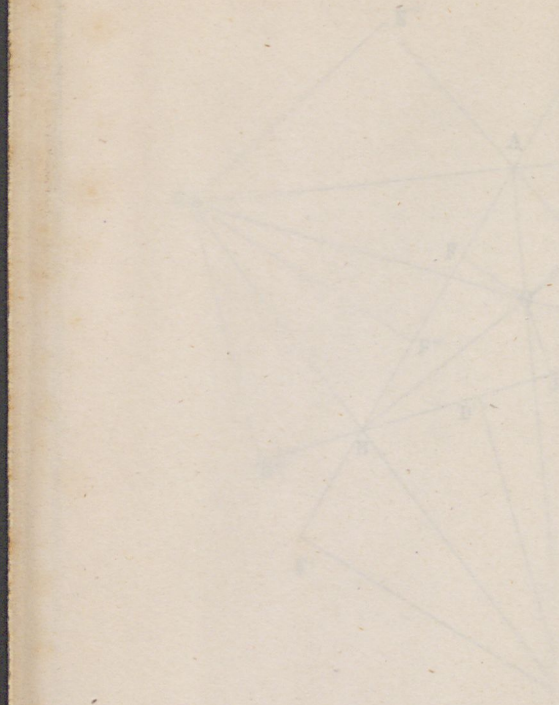
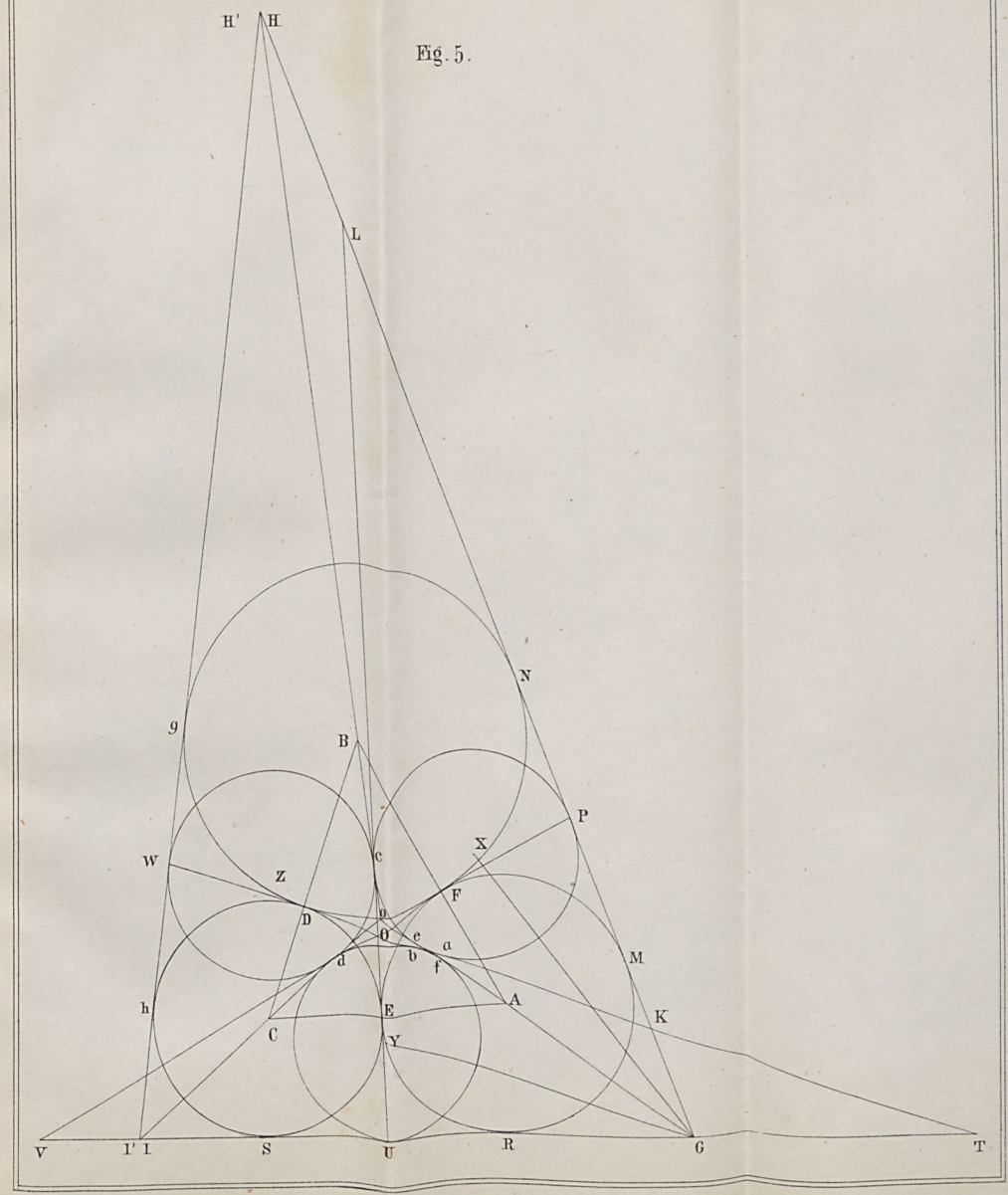


Fig. 5.




B'
B
L
g
B
W
C

Fig. 7.

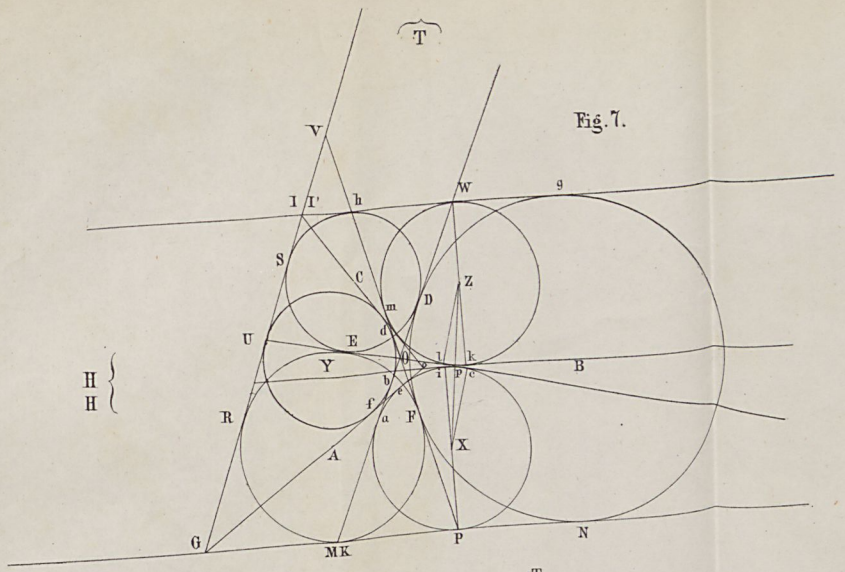
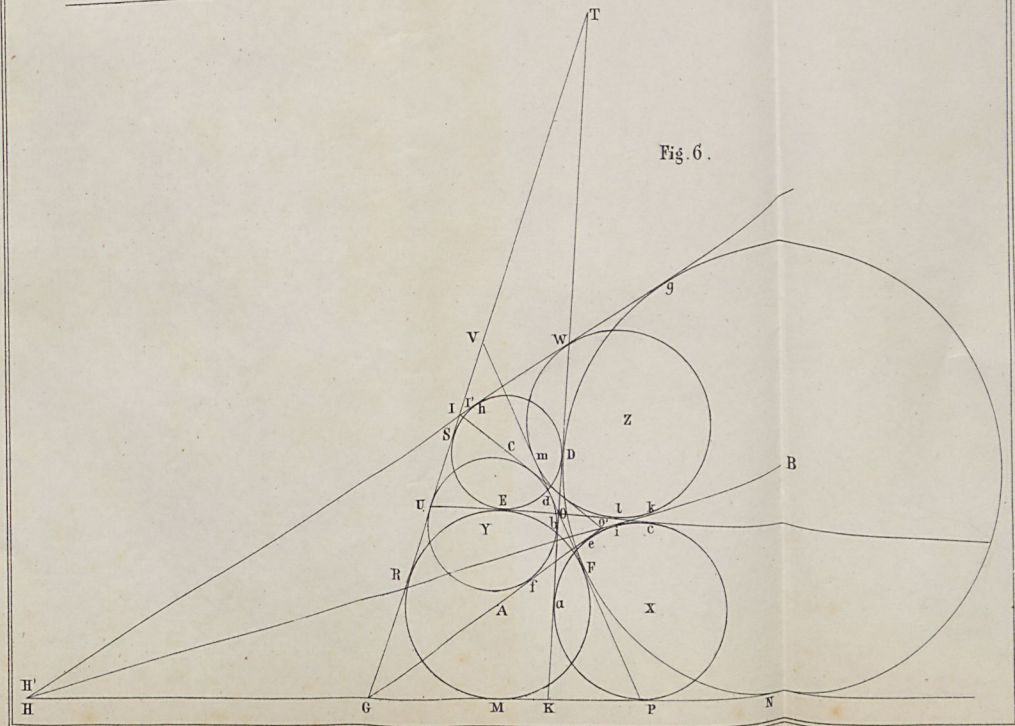

T
V
W
9
I
I'
h
S
C
Z
D
m
U
E
d
Y
B
H
H
b
e
f
a
F
R
X
A
G
M
K
P
N

Fig. 6.


T
9
V
W
I
I'
h
Z
S
C
m
D
B
U
E
d
Y
R
f
F
A
a
X
H'
H
G
M
K
P
N